Gründliche

Anweisung

zum

Rechnen mit gemeinen Brüchen

und mit

Decimal-Brüchen

für Schulen und für den Selbstunterricht,

mit vielen, stufenmäßig geordneten Uebungsaufgaben.

Bearbeitet von

G. Buchner,

Seminarlehrer am k. Schullehrer-Seminar für Schwaben und Neuburg in Lauingen.

München, 1856.

Bei Joseph Anton Finsterlin.

Gedruckt bei J. Paul in Günzburg a. D.

Vorwort.

Vieljährige Erfahrungen in meinem Berufe haben mich zu der festen Ueberzeugung gebracht, daß eine gründliche Einsicht in das Wesen der Bruchzahlen und eine mit klarem Bewußtsein erfaßte Fertigkeit in Behandlung der Brüche alle weiteren Fortschritte im Rechnen wesentlich fördere und jede höhere Stufe im Rechnungs-Unterrichte erleichtere. Darum dürfte es wol nicht vergebliche Mühe sein, diesen Theil der Arithmetik in einer ausführlicheren Darstellung der Oeffentlichkeit zu übergeben. Was den Stufengang anbelangt, bin ich hierin großentheils den trefflichen Werken von Decker, Scholz und Diesterweg und Heuser gefolgt, weil dieser sich mir in meiner schon ziemlich langen Praxis für den Elementar-Unterricht als der entsprechendste bewährt hat. Meine ehemaligen, mir in freundlicher Erinnerung bleibenden Zöglinge werden in diesem Buche den genossenen Rechnungs-Unterricht ihres ehemaligen Lehrers wieder finden.

Auf strenge Wissenschaftlichkeit macht die Schrift nicht Anspruch. Mein Augenmerk war nur *Anschaulichkeit, Klarheit* und *Gründlichkeit*. Darnach wenigstens strebte ich, weil ich — feind allem unverstandenem Regelwerk und Mechanismus — diese Eigenschaften für jeden Gegenstand im Elementar-Unterrichte als durchaus unerläßlich erachte. Darum mag wol Manchem Manches zu umständlich erscheinen. Aber das Buch ist auch für den *Selbstunterricht* bestimmt, und deßwegen mußte Vieles näher erklärt und ausführlicher gegeben werden, was sonst dem freien Vortrage des Lehrers überlassen werden kann.

*

Das Rechnen mit Decimalbrüchen ist zwar bislang in dem Lehrplane für unsere Elementar=Schulen ausgeschlossen; allein die Zeitverhältnisse gebieten es täglich mehr, daß wenigstens der Lehrer eine nähere Kenntniß dieser Zahlenverhältnisse und eine gewisse Fertigkeit in Behandlung der Decimalzahlen sich erwerbe, und über kurz oder lang wird auch in Elementar=Schulen der Unterricht über Decimalbrüche gefordert werden müssen. Es ist darum die neuere Anordnung, daß in den Schullehrer=Seminarien die Lehre über Decimalbrüche vorgetragen und den Zöglingen die nöthige Kenntniß derseben beigebracht werde, wol eine ganz zeitgemäße. Das Rechnen mit Decimalzahlen bietet auch keine besonderen Schwierigkeiten dar, indem sich diese so natürlich und einfach an die ersten Elemente der Zahlenlehre anschließen und ganz den Grundsätzen unsers Zehnersystems unterworfen sind, hat aber überdies noch entschiedene Vortheile, da gerade hiedurch viele Rechnungsoperationen sehr erleichtert und abgekürzt werden, und es sogar in vielen Fällen ganz unentbehrlich ist. Um deßwillen schon dürfte eine gründliche und klare Darstellung über die Behandlung der Decimalbrüche willkommen sein.

Die jedem einzelnen Abschnitte beigefügten, stufenmäßig geordneten Fragen, oder Rechnungs=Aufgaben bezwecken nicht nur Wiederholung, Uebung und Befestigung des Gelernten; sondern es sollen die Schüler hiedurch zugleich zum eigenen Denken und Urtheilen veranlaßt, dadurch zum weiteren Nachdenken und Forschen angespornt, und so ihr Denk=, Verstandes= und Urtheils=Vermögen geübt, geschärft und gestärkt werden. — Möge meine Absicht erreicht werden!

Der Verfasser.

Inhalt.

Erste Hauptübung.

Seite.

Vorübungen für das Rechnen mit Bruchzahlen. . . 1

1. Von Brüchen überhaupt; Entstehung und Begriff derselben. 1
2. Benennung der Bruchglieder und Darstellung eines Bruches. 9
3. Eintheilung und Arten der Brüche. 11
4. Das Bilden uneigentlicher, ächter und unächter Brüche aus ganzen und gemischten Zahlen. 15
5. Zurückführen uneigentlicher und unächter Brüche in ganze und gemischte Zahlen. 18
6. Vergleichen der Brüche mit der Einheit und unter einander in Hinsicht ihres Werthes. 20
7. Die möglichen Veränderungen, die an einem Bruche ohne und mit Beibehaltung seines Werthes vorgenommen werden können. 24
   A. Zerfällen eines Bruches. 24
   B. Veränderung eines Bruches durch Vervielfachung des Zählers mit einer ganzen Zahl. 25
   C. Veränderung eines Bruches durch Division des Zählers mit einer ganzen Zahl. 26
   D. Veränderung eines Bruches durch Vervielfachung des Nenners mit einer ganzen Zahl. 27
   E. Veränderung eines Bruches durch Division des Nenners durch eine ganze Zahl. 29
   F. Veränderung eines Bruches durch Multiplikation des Zählers und Nenners mit einer ganzen Zahl [Erweitern]. 31
   G. Veränderung eines Bruches durch Division des Zählers und des Nenners mit einer ganzen Zahl [Kürzen]. 36
8. Das Verwandeln ungleichnamiger Brüche in gleichnamige. 38

Seite.
Schriftliche Darstellungsweise der bisherigen mündlichen Vorübungen im Rechnen mit Bruchzahlen. . . . 48

1. Schriftliche Darstellungsweise eines Bruches durch Ziffern. 48
2. Arten der Brüche in schriftlicher Darstellung durch Ziffern. 48
3. Schriftliche Darstellung über das Bilden uneigentlicher, ächter und unächter Brüche. 49
4. Schriftl. Darstellungsweise über das Verwandeln uneigentlicher und unächter Brüche in ganze und gemischte Zahlen. 50
5. Schriftl. Bezeichnung bei Vergleichung der Brüche unter einander. . . . 51
6. Schriftl. Darstellungsweise der möglichen Veränderungen, die mit einem Bruche vorgenommen werden können. 51
7. Schriftl. Darstellung über das Erweitern der Brüche. 52
8. Schriftl. Darstellungsweise über das Kürzen der Brüche. 54
9. Schriftl. Darstellung über die Verwandlung ungleichnamiger Brüche in gleichnamige. 66

Zweite Hauptübung.

Das Rechnen mit Bruchzahlen in den vier Grundrechnungs-Arten. . 73

I. Zusammenzählen.

a) Mündliche Uebung. 73

1. Zusammenzählen gleichnamiger Brüche. 73
2. „ „ ungleichnamiger Brüche. 74
3. „ „ angewandter Bruchzahlen. 75

b) Schriftliche Darstellung. 77

1. Zusammenzählen gleichnamiger Brüche. 77
2. „ „ ungleichnamiger Brüche. 78
3. „ „ angewandter Bruchzahlen. 79

II. Abziehen.

a) Mündliche Uebung. 81

1. Abziehen gleichnamiger Brüche. 81
2. „ ungleichnamiger Brüche. 83
3. „ angewandter Bruchzahlen. 84

b) Schriftliche Darstellung. 87

1. Abziehen gleichnamiger Brüche. 87
2. „ ungleichnamiger Brüche. 88
3. „ angewandter Bruchzahlen. 90

Seite.

III. Multipliziren.

a) Mündliche Uebungen. 91

Multiplikation unbenannter Zahlen. 91
" angewandter Aufgaben. 102
Die Multiplikation mit Brüchen angewendet auf die Resolution übergeordneter Größen in untergeordnete. 104
Die Multiplikation mit Brüchen angewendet auf die Reduktion untergeordneter Größen in übergeordnete. 105

b) Schriftliche Darstellung. 107

Multiplikation in unbenannten Zahlen. 108
" in benannten Zahlen. 111
Resolutions-Berechnungen. 115
Reduktions-Berechnungen. 117

IV. Dividiren.

Vorbemerkungen. 121

a) Mündliche Uebungen. 124

Division in unbenannten Zahlen. 124
" in angewandten Zahlen. 136
Die Division angewendet auf die Reduktion untergeordneter Größen in übergeordnete Größen. 141

b) Schriftliche Darstellung. 147

Division in unbenannten Zahlen. 147
" in angewandten Zahlen. 152
Reduktions-Berechnungen. 158

Das Rechnen mit Decimalbrüchen.

Vorbegriffe.

1. Das Zehner-, Decimal- oder das dekadische Zahlensystem. 166
2. Begriff, Entstehung und schriftliche Darstellung der Decimalbrüche. . . 166
3. Anschreiben der Decimalbrüche. 170
4. Erweitern und Gleichnamigmachen der Decimalbrüche. 171
5. Kürzen und Abkürzen der Decimalbrüche. 172
6. Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche. 173
7. Arten der Decimalbrüche. 179
8. Zurückführen der Decimalbrüche in gemeine Brüche. 182

Seite.
Die vier Grundrechnungsarten in Decimalbrüchen. . 187
I. Addition der Decimalbrüche. 187
II. Subtraktion der Decimalbrüche. 189
III. Multiplikation der Decimalbrüche. . . . 191
IV. Division der Decimalbrüche. 194
Abgekürztes Multiplizieren der Decimalbrüche. 200
Abgekürztes Dividiren der Decimalbrüche. 201
Auflösen (Resolviren) übergeordneter Größen in untergeordnete Größen. . . 202
Zurückführen (Reduziren) untergeorneter Größen in Decimalbrüche übergeordneter Größen. 203
Die Decimalbrüche, angewendet in den Berechnungen praktischer Regeldetri-Aufgaben. 204

Erste Hauptübung.

Vorübungen für das Rechnen mit Bruchzahlen zu den vier Grundrechnungsarten in mündlicher und versinnlichter Behandlungsweise.

1. Von Brüchen überhaupt; Entstehung und Begriff derselben.

Ein Apfel, ein Haus, eine Linie, ein Kreuzer, eine Maß Wein, ein Pfund Butter u. dgl., jedes für sich betrachtet, ist **eins**; überhaupt ist jedes Ding, das nur für sich allein betrachtet wird, *eins*, und heißt in Beziehung zu der gleichartigen Menge *eine Einheit*. In Hinsicht, daß ein Ding vollständig vorhanden, also gar kein Theil fehlt, heißt es *das Ganze*. Ein Ganzes oder eine Einheit muß aber nicht nothwendig eine *einfache* Einheit sein, sondern *jede* Mehrheit kann als ein Ganzes oder als eine Einheit angesehen werden, es mag nun wasfür immer eine Zahl, oder irgend ein Ding, eine benannte oder unbenannte Größe sein. Demnach kann nicht bloß die Zahl 1, sondern auch 2, 3, 4, 5, 10, 25, 60, 100, überhaupt *jede* Zahl, so wie jedes Ding, z. B. ein Getreidefeld, ein Wald, ein Haus, eine Stadt, ein Land, ein Erdtheil, die Erde, das ganze Weltall selbst als *Einheit*, als einheitliches Ganzes angesehen werden. Aber auch jedes solches Ganze kann hinwider als *Theil* eines andern Ganzen betrachtet werden, z. B. 1 ist nur ein *Theil* von 2, 3, 4, 5 u. s. w.; 12 ist ein Theil von 24, 36, 42, 50 ꝛc.; 1, 3, 7 ℔ sind Theile eines oder mehrer Zentner ꝛc.; ein Zimmer ist nur ein Theil eines Hauses, dieses ein Theil einer Stadt, diese ein Theil eines Landes u. s. w. Das Gesagte möge an einem Beispiele versinnlicht sein. Diese Linie z. B. |————————| betrachte ich für sich, und sie gilt mir als *Eins*; sie ist ein *Ganzes*, eine *Einheit*. Ich kann diese Linie auch verlängern, (oder verlängert denken 1, 2, 3 mal, ꝛc.) z. B.

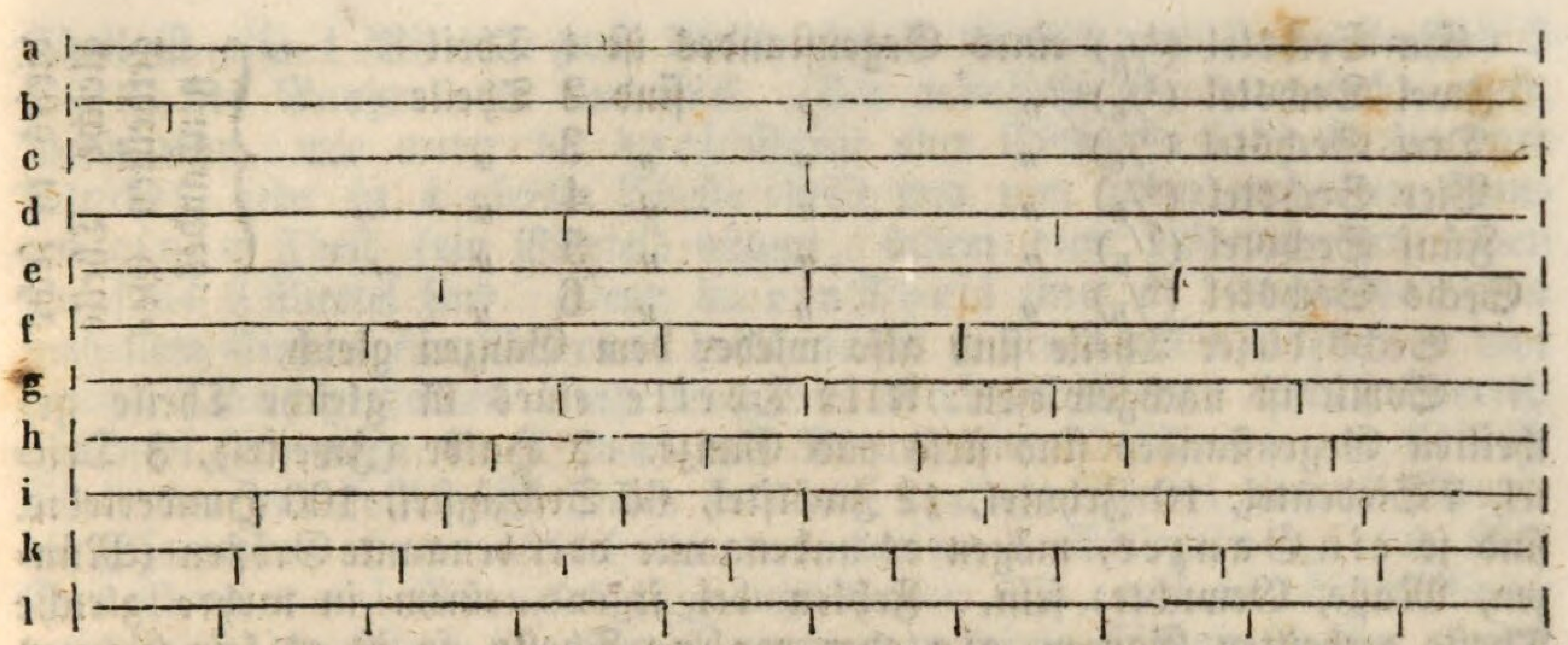
a b c
|————————ˌ————————| Es ist die nämliche Linie da, jedoch noch ein Mal so lang als anfänglich. Auch diese verlängerte Linie von a bis c kann ich als ein *Ganzes*, als eine *Einheit* ansehen. In sofern ist also jede dieser Linien *eins*, ein *Ganzes*. Vergleicht man aber beide Linien mit einander, so ergibt sich ein anderes Verhältniß. Die ursprüngliche Linie, die nur von a bis b reichte, ist jetzt, im Vergleich mit der verlängerten Linie von a bis c, *nicht* mehr das Ganze, sie ist jetzt nur

ein Theil derselben. Daraus folgt, daß jede Größe auf **zweierlei** Weise angeschaut werden kann, als Ganzes oder Einheit, insofern irgend eine Größe nur an und für sich betrachtet wird, und als Theil, insofern sie mit einer andern Größe in Vergleich gestellt wird. —

Jedes Ganze kann wirklich in Theile getheilt, oder als in Theile getheilt gedacht werden, und zwar in 2, 3, 4, 5 und noch mehre Theile, ja in so viele, als man nur will. Die Theile können unter sich gleich oder ungleich, größer oder kleiner sein.

In dem Folgenden müssen wir bei den Schülern die Kenntniß der vier Grundrechnungsarten, und darin eine gewisse Fertigkeit im Rechnen, mit ganzen Zahlen voraussetzen. Aus dem frühern Rechnungsunterrichte also wird der Schüler wissen, daß eine Zahl in zwei oder mehre gleiche oder ungleiche Theile getheilt werden kann. Die Zahl 12 (als Ganzes betrachtet) kann in 6 + 6 (zwei gleiche Theile), in 4 + 4 + 4 (drei gl. Thl.) in 3 + 3 + 3 + 3 (vier gl. Thl.) in 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 (sechs gl. Thl); oder in 8 + 4, in 7 + 5, in 10 + 2, in 3 + 9, in 1 + 11 (je zwei ungl. Thl.); oder in 5 + 1 + 6, 7 + 3 + 2, 3 + 4 + 5, (je drei ungl. Thl.); oder in 4 + 3 + 1 + 2 + 2 (fünf ungl. Thl.) u. s. w., getheilt werden. Jeder dieser Theile kann auch wenn für sich betrachtet, als Ganzes angesehen werden; aber in Beziehung oder in Vergleich zu der Zahl 12 sind es nur Theile. Jeder dieser Theile besteht immer noch aus einfachen Einheiten, nämlich 6 aus 6 mal eins, 4 aus 4 mal 1 ꝛc., 8 aus 8 mal 1, 7 aus 7 mal 1 u. s. w., und somit bleibt immer eine bestimmte Vorstellung der Zahlengröße, wir mögen die Zahl 12 in gleiche oder ungleiche Theile zerlegen, weil wir jeden Theil sowol mit der Zahl 12, als mit der einfachen Einheit, mit 1 (der kleinsten Zahl) vergleichen, also bestimmen können, um wie viel Einheiten (Eins) jeder Theil kleiner als 12, oder größer als 1 ist.

Auch die einfache Einheit, die Eins, ein Ding kann ebenfalls in gleiche oder ungleiche Theile getheilt werden. Einen Bogen Papier, eine Elle Band, ein Stück Brod ꝛc. kann man durch Brechen, Reißen, Zerschneiden ꝛc. in zwei oder mehre Theile theilen. Sind die Theile nicht von gleicher Größe, also ungleich, so kann man sich von keinem Theile eine bestimmte Vorstellung seiner Größe in Beziehung zum Ganzen oder zu den Theilen machen, deßwegen auch keinem Theile einen bestimmten Namen geben, auch nicht die Theile nach der Anzahl der gemachten Theile benennen. Ein oder mehre solche Theile heißen nur ein oder mehre Stücke von dem Papierbogen, oder von der Elle Band, von dem Stück Brod u. s. w. Hierin liegt der Unterschied einer in ungleiche Theile getheilten, aus mehren einfachen Einheiten zusammengesetzten Zahl, und der in ungleiche Theile getheilten einfachen Einheit. — Theilt man dagegen die Einheit, irgend ein Ding, einen Bogen Papier, eine Elle Band ꝛc. in gleiche Theile, so steht jeder Theil in einem bestimmten, und zwar in demselben Verhältnisse zum Ganzen und zu einander unter sich. Jeder Theil erhält dann den Namen, welcher von der Anzahl der Theile, in welche die Einheit, das Ganze oder der Gegenstand getheilt worden ist, abgeleitet wird. Wir wollen das Gesagte an Linien anschaulich machen.



Die Linie a stellt das ungetheilte Ganze dar. Diese Linie ist unter b in 4, aber ungleiche Theile getheilt. Hierauf ist das Ganze unter c, d, e ꝛc. in 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 gleiche Theile getheilt. Je mehr Theile dasselbe Ganze getheilt ist, desto kleiner sind die Theile. — Jeder dieser Theile ist kleiner als das Ganze; auch mehre Theile zusammen sind kleiner als das Ganze, und alle Theile des in eine beliebige Anzahl Theile getheilten Ganzen machen gerade das Ganze oder sind dem Ganzen gleich. — Ein Theil der das Ganze vorstellenden Linie b kann nicht bestimmt benannt werden, weil dieses Ganze in ungleiche Theile getheilt ist; ein solcher Theil ist nur ein Stück des Ganzen in einem unbestimmten Verhältniß zu demselben. Unter c, d, e ꝛc. ist das Ganze in 2, 3, 4 ꝛc. gleiche Theile getheilt, somit steht jeder Theil in einem bestimmten Verhältniß zu dem Ganzen, und da die Theile ihre Benennung von der Anzahl der Theile, in welche das Ganze getheilt ist, erhalten: so heißt jeder Theil

von c ein Halbes oder die Hälfte (Zweitel) ($^1/_2$), weil es in 2,
von d heißt jeder Theil ein Drittel ($^1/_3$) des Ganzen, weil es in 3,
„ e „ „ „ „ Viertel ($^1/_4$) „ „ „ „ „ 4,
„ f „ „ „ „ Fünftel ($^1/_5$) „ „ „ „ „ 5
u. s. f. u. s. f. gleiche Theile getheilt ist.
„ l heißt jeder Theil ein Zehntel ($^1/_{10}$) des Ganzen u. s. w.

2 Theile von c sind gleich dem Ganzen oder das Ganze selbst.
2 Theile von d sind 2 Drittel ($^2/_3$) von dem Ganzen.
3 „ „ d „ 3 Drittel ($^3/_3$), gleich dem Ganzen.
2 „ „ e „ 2 Viertel ($^2/_4$) von „ „
3 „ „ e „ 3 Viertel ($^3/_4$) von „ „
4 „ „ e „ 4 Viertel ($^4/_4$), gleich „ „
2 „ „ f „ 2 Fünftel ($^2/_5$) von „ „
u. s. f. u. s. f.

2 Theile von g sind 2 Sechstel ($^2/_6$) von dem Ganzen.
u. s. w. u. s. w. u. s. w.

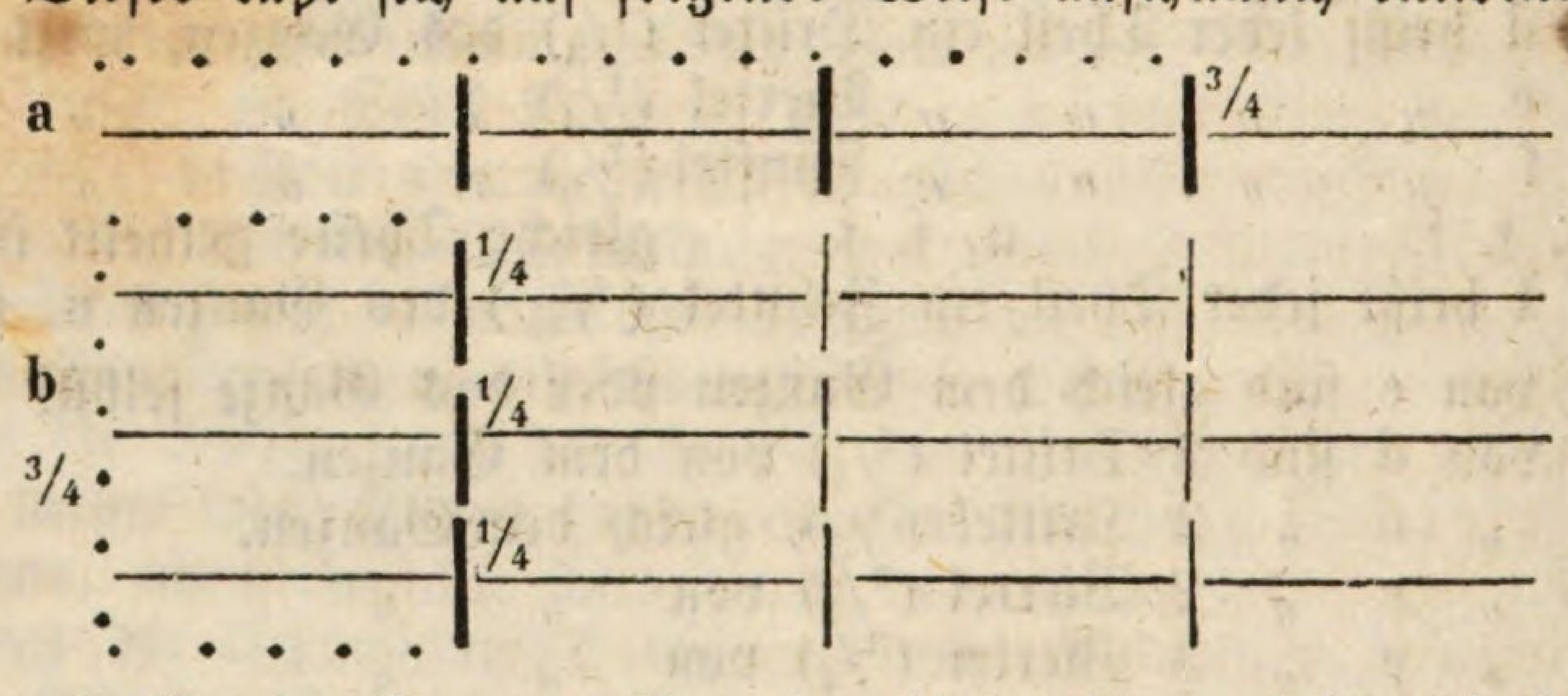
Eben dasselbe, was hier an Linien anschaulich nachgewiesen worden, gilt von jedem beliebigen Gegenstande.

Ein Sechstel ($^1/_6$) eines Gegenstandes ist 1 Theil
Zwei Sechstel ($^2/_6$) „ „ sind 2 Theile
Drei Sechstel ($^3/_6$) „ „ „ 3 „
Vier Sechstel ($^4/_6$) „ „ „ 4 „
Fünf Sechstel ($^5/_6$) „ „ „ 5 „
Sechs Sechstel ($^6/_6$) „ „ „ 6 „
} dieses in sechs gleiche Theile getheilten Gegenstandes.

Sechs dieser Theile sind also wieder dem Ganzen gleich.

Somit ist nachgewiesen: Alle Theile eines in gleiche Theile getheilten Gegenstandes sind stets das Ganze. 2 Halbe (Zweitel), 3 Drittel, 7 Siebentel, 10 Zehntel, 12 Zwölftel, 60 Sechzigstel, 100 Hundertel ꝛc. sind je ein Ganzes, mögen es unbenannte oder benannte Größen (Münzen, Maße, Gewichte) sein. Fehlen bei irgend einem in mehre gleiche Theile getheilten Ganzen ein oder mehre Theile, so ist es kein Ganzes mehr, sondern es sind dann nur ein oder mehre Theile des Ganzen, was man eben in der Zahlenlehre Bruch oder Bruchzahl nennt. 1 Halbes, 1 Drittel, 3 Achtel, 7 Zehntel, 11 Zwölftel u. s. w., sind also Brüche oder Bruchzahlen. Daher: „Ein oder mehre gleiche Theile irgend eines Ganzen heißen **Bruch** *) oder **Bruchzahl**."

Wie nun ein Ganzes, eine Einheit in mehre gleiche Theile zerlegt werden kann, so kann man begreiflicher Weise auch mehre Ganze in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilen. Man kann unbenannte Zahlen, z. B. 2, 3, 5, 12, ꝛc., ebenso benannte Größen, z. B. 2, 3, 4, 5, 12 Gulden, 2, 3, 8, 20 ꝛc. Maß u. s. a., jede in 2, 3, 4, 5, 6, u. s. w. gleiche Theile zerlegen. Nimmt man auch von diesen in gleiche Theile getheilten Größen einen oder mehre dieser Theile, nur nicht so viele, als die Anzahl beträgt, in welche jede Einheit getheilt worden ist, so entsteht ebenfalls ein Bruch. — (Auch wenn mehre Theile genommen werden, heißen diese ein Bruch, auf was wir weiter unten kommen werden.) — Dieses läßt sich auf folgende Weise anschaulich entwickeln.



Unter b ist ein Ganzes (hier eine Linie) in 4 gleiche Theile getheilt worden; drei dieser Theile sind durch Punkte als zusammengenommen angedeutet und bilden einen Bruch, nämlich 3 Viertel. Denn wird ein Ganzes in 4 gleiche Theile getheilt, so heißt jeder Theil Viertel. Ein

*) Ein Stück Brod, ein hölzernes Stäbchen, eine Glastafel ꝛc. kann man durch Brechen in zwei oder mehre Theile theilen. Jeder dieser Theile entsteht also durch einen Bruch. Daher, nämlich aus der eigentlichen Wortbedeutung, mag wol auch der Begriff „Bruch" (Brüche) in obigem Sinne, worunter man ein oder mehre gleiche Theile eines getheilten Ganzen versteht, entstanden sein.

Theil ist also 1 Viertel, zwei Theile sind 2 Viertel und 3 Theile sind 3 Viertel des Ganzen oder von eins. Der nämliche Bruch entsteht auch, wenn man, wie unter b, drei Ganze oder Einheiten (hier Linien oder Striche), jede in 4 gleiche Theile theilt und von jedem getheilten Ganzen einen Theil (ein Viertel) nimmt, indem diese zusammengenommen ebenfalls 3 Viertel sind. Denn da ein Theil einer in vier gleiche Theile getheilten Einheit ein Viertel heißt, so ist je ein Theil von zwei in vier gleiche Theile getheilten Einheiten zwei mal ein Viertel oder 2 Viertel, von drei Einheiten drei mal ein Viertel oder 3 Viertel. — Je ein Theil von vier solchen Einheiten sind vier mal ein Viertel oder 4 Viertel, die zusammen einer Einheit von diesen 4 Einheiten gleich sind. Den Bruch drei Viertel ($^3/_4$) erhält man also, wie an obigen Linien anschaulich dargethan ist, einmal wenn man eine Einheit in vier gleiche Theile theilt und drei dieser Theile zusammennimmt; oder auch wenn man drei Einheiten, jede in vier gleiche Theile theilt, von jeder Einheit nur einen Theil nimmt und diese Theile sich vereinigt denkt. Demnach entstehen Brüche:

1. durch Theilung **eines** Ganzen oder **einer** Einheit in zwei oder mehre gleiche Theile;
2. durch Theilung **mehrer** Ganzen oder **mehrer** Einheiten in eine gleiche Anzahl gleicher Theile.

Obiger, nach der ersten Art erhaltene Bruch drei Viertel ($^3/_4$), ist eben 3 Viertel in Beziehung auf das einfache Ganze; denn dieser Bruch drückt aus, daß von den vier Theilen, in die ein Ganzes getheilt worden ist, drei Theile genommen worden sind. — Eben in dieser Beziehung, also nur in der zu dem einfachen Ganzen, muß auch der auf die zweite Art erhaltene Bruch drei Viertel ($^3/_4$) verstanden werden, obwol er aus drei Ganzen entstanden ist; denn läßt man diese 3 Viertel aus drei Ganzen entstehen, so nimmt man nur von jedem Ganzen einen Theil, d. i. 1 Viertel, die zusammen auch drei Viertel sind, jedoch nur in Beziehung zu einem dieser drei Ganzen. In Beziehung zu den drei Ganzen sind diese 3 Theile nur ein Viertel oder der vierte Theil; denn drei Ganze haben 4 mal 3 solche Theile (4 mal 3 Viertel), wovon man sich an obigen Linien unter b auch anschaulich überzeugen kann. — Der Bruch 3 Viertel ist also in dieser Auffassung nicht anders zu verstehen, als:

der vierte Theil oder ein Viertel von drei Ganzen ist drei Viertel in Beziehung zu einem Ganzen. Daher ist der vierte Theil (ein Viertel) von 3, gleich drei mal der vierte Theil von 1. — Ueberhaupt wird immer, man mag nun einen oder mehre gleiche Theile eines oder mehrer Ganzen genommen haben, der Werth eines solchen Bruches auf die Einheit, auf eins dieser Ganzen bezogen. Nur in dieser Anschauungsweise wird uns erst die Größe und Bedeutung eines Bruches klar und verständlich, daher es um so unerläßlicher ist, schon von Anfang gleich jeden Bruch in dieser Beziehung auf das einfache Ganze, auf die Einheit aufzufassen oder überzutragen. Ist z. B. die Frage: „Wie groß ist der achte Theil (ein Achtel) von 5 Ganzen?" — so wird uns die Größe oder der Werth dieses Achtels von

5 Ganzen erst dann recht begreiflich, wenn wir untersuchen, wie viel dieses von **einem** Ganzen ist. Der achte Theil (1 Achtel) von 1 Ganzen ist 1 Achtel; der achte Theil von 2 = 2 mal 1 Achtel von 1, weil 2 = 2 mal 1; der achte Theil von 3 = 3 mal 1 Achtel von 1, weil 3 = 3 mal 1; der achte Theil von 4 = 4 mal 1 Achtel von 1, weil 4 = 4 mal 1, und der achte Theil von 5 = 5 mal 1 Achtel von 1, weil 5 = 5 mal 1. Es ist also der achte Theil oder das Achtel von 5 Ganzen eben so groß, als 5mal der achte Theil von **einem** Ganzen.

Was heißt also — die Größe oder der Werth des Bruches auf das einfache Ganze übergetragen —

$^1/_3$	von	2?	—	($^1/_3$	von	2 = 2	mal	$^1/_3$	von	1 =	$^2/_3$ von eins)
$^1/_4$	"	2?	—	($^1/_4$	"	2 = 2	"	$^1/_4$	"	1 =	$^2/_4$ " ")
$^1/_5$	"	2?	—	($^1/_5$	"	2 = 2	"	$^1/_5$	"	1 =	$^2/_5$ " ")
$^1/_5$	"	3?	—	($^1/_5$	"	3 = 3	"	$^1/_5$	"	1 =	$^3/_5$ " ")
$^1/_5$	"	4?	—	($^1/_5$	"	4 = 4	"	$^1/_5$	"	1 =	$^4/_5$ " ")
$^1/_6$	"	5?	—	($^1/_6$	"	5 = 5	"	$^1/_6$	"	1 =	$^5/_6$ " ")
$^1/_{12}$	"	7?	—	($^1/_{12}$	"	7 = 7	"	$^1/_{12}$	"	1 =	$^7/_{12}$ " ")
$^1/_{40}$	"	13?	—	($^1/_{40}$	"	13 = 13	"	$^1/_{40}$	"	1 =	$^{13}/_{40}$ " ")

Diese Auffassung der Brüche, ihre Größe aus allen mehrfachen Ganzen auf das einfache Ganze zu beziehen, muß, wie gesagt, gleich von vornherein und überall um so mehr zur sichern Fertigkeit werden, als eine solche Beziehung ganz natürlich und in der Zahlenlehre allgemein angenommen ist, weßwegen bei Nennung eines Bruches seine Beziehung zum einfachen Ganzen, zur Einheit nicht besonders angegeben wird. Allgemein sagt man ganz einfach: ein Drittel ($^1/_3$), drei Viertel ($^3/_4$), fünf Zwölftel ($^5/_{12}$) u. s. w., und Jedermann versteht unter ein Drittel — ein Drittel **von eins**, unter drei Viertel — drei Viertel **von eins**, unter fünf Zwölftel — fünf Zwölftel **von eins**, oder von **einer** Einheit, von **einem** einfachen Ganzen. Ist dagegen 1 Drittel, 3 Viertel, 5 Zwölftel ꝛc. von einem mehrfachen Ganzen gemeint, so ist dieses in jedem einzelnen Falle anzugeben, z. B. ein Drittel von 2, drei Viertel von 4, fünf Zwölftel von 7, drei Viertel von 16 u. s w.— $^3/_4$ von 16 heißt entweder: a) 3 mal der 4te Theil von 16, oder: b) 1mal der 4te Theil vom Dreifachen der Zahl 16 (von 3 mal 16). Ist ein solches mehrfaches Ganze nicht angegeben, so bezieht sich der Werth jedes Bruches immer nur auf das einfache Ganze, auf die Einheit oder auf **eins**. — Aus dieser Entwickelung folgt nun, und es läßt sich dieses auch an obigen vier Linien a und b, S. 4. anschaulich nachweisen, daß jeder Bruch, der mehr als einen Theil einer in gleiche Theile getheilten Einheit enthält, in zweifacher Weise aufgefaßt werden kann, nämlich:

1. als **mehre** Theile **eines** einfachen Ganzen, einer Einheit, und
2. als **ein** Theil eines **mehrfachen** Ganzen.

Z. B. Drei Viertel ($^3/_4$) sind 3 mal 1 Viertel, nämlich von 1, (vergleiche Linie a), aber auch 1 Viertel von 3, d. i. von 3 mal 1, (vergleiche die 3 Linien unter b). Die 3 durch Punkte eingeschlossenen Theile sind augenscheinlich nur 1 Viertel von den 3 Linien, aber 3 Viertel von **einer** in 4 gleiche Theile getheilten Linie. — Eben so sind:

Fünf Achtel ($^5/_8$)	=	5mal 1 Achtel	von 1
oder	=	1mal 1 Achtel	von 5;
Sieben Zehntel ($^7/_{10}$)	=	7mal 1 Zehntel	von 1
oder	=	1mal 1 Zehntel	von 7;
Elf Fünfundzwanzigstel ($^{11}/_{25}$)	=	11mal 1 Fünfundzwanzigstel	von 1
oder	=	1mal 1 Fünfundzwanzigst.	von 11 ꝛc.;

Oder in einer etwas andern Sprechform:

Drei Fünftel ($^3/_5$)	=	3mal der 5. Theil	von 1 Ganzen,
oder	=	1 „ „ 5. „	„ 3 Ganzen.
Neun Sechzehntel ($^9/_{16}$)	=	9mal der 16. Theil	von 1 Ganzen,
oder	=	1 „ „ 16. „	„ 9 Ganzen.
u. s. w.		u. s. w.	

Es ist wichtig, ja sogar nothwendig, den Rechenschüler schon bald mit dieser doppelten Anschauungsweise der Brüche vertraut zu machen, weil dadurch nicht nur manche Auflösung, besonders beim Kopfrechnen, vereinfacht und darum erleichtert, sondern auch eine klarere Einsicht in das Wesen der Bruchzahlen wesentlich mit begründet wird.

Wie bei den ganzen Zahlen, unterscheidet man auch hier unbenannte und benannte Bruchzahlen. $^2/_3$, $^4/_5$, $^5/_8$ ꝛc. sind unbenannte, $^1/_2$ fl., $^5/_6$ ℔., $^7/_{10}$ Eimer ꝛc. sind benannte Brüche. Indeß kann doch jede sogenannte unbenannte Bruchzahl als eine benannte ganze Zahl angesehen werden, insofern als jeder Theil ja schon einen Namen, eine Benennung erhält, abgeleitet von der Zahl oder Anzahl der gleichen Theile, in welche das Ganze getheilt worden ist. Solche Theile eines Bruches heißen ja Halbe (Zweitel), Drittel, Viertel, Fünftel u. s. w. Es ist

1 Halbes	= 1mal ein Halbes;	2 Drittel	= 2mal ein Drittel;
4 Fünftel	= 4mal ein Fünftel;	5 Achtel	= 5mal ein Achtel;
7 Fünfzehntel	= 7mal ein Fünfzehntel;	19 Zwanzigstel	= 19mal ein Zwanzigstel ꝛc.,

so wie 3 Gulden = 3mal ein Gulden,
15 Kreuzer = 15mal ein Kreuzer,
9 Pfund = 9mal ein Pfund,
48 Nüsse = 48mal eine Nuß sind, u. s. w.

Wie schon Eingangs gesagt worden, kann jede unbenannte oder benannte Größe sowol ein Ganzes, als auch ein Theil eines andern größeren Ganzen sein. 1 Elle ist, für sich allein betrachtet, ein Ganzes; aber in Beziehung zu 2, 3, 4, 12, 30 Ellen u. s. w., ist sie nur ein Theil. 15 Kreuzer können für sich als ein Ganzes, oder da sie 15mal ein Kreuzer sind, als ein mehrfaches Ganzes betrachtet werden; aber in Beziehung zu 30, 45, 50, 60 Kreuzern sind jene nur ein Theil, darum ein Bruch; auch in Beziehung zu 1 Gulden sind sie nur ein Theil, also wieder ein Bruch, nämlich 1 Viertel-Gulden. Ueberhaupt ist jede untergeordnete Größe, insofern sie in Vergleich mit einer gleichartigen übergeordneten gesetzt wird, nur Theil dieser, darum als Bruch zu betrachten; daher 3 Pfennige = $^3/_4$ Kreuzer; 20 kr. = $^{20}/_{60}$ = $^1/_3$ fl.; 24 Loth = $^{24}/_{32}$ = $^3/_4$ ℔ = $^{40}/_{100}$ = $^2/_5$ Ztr. u. s. w.

Daraus ergibt sich der Unterschied von ganzen Zahlen und Bruchzahlen. **Ganze Zahlen** sind es, wenn sie lauter vollständige

Einheiten enthalten und mit der einfachen Einheit gleichnamig sind; z. B. 2 = 2 mal 1; 5 Metzen = 5 mal 1 Metzen. **Gebrochene Zahlen (Brüche)** aber heißen sie, wenn ihre Einheiten nur als Theile einer andern Einheit, einer übergeordneten Größen-Einheit, oder als Theil eines mehrfachen Ganzen angesehen werden können; z. B. 2 Drittel = 2 mal 1 Drittel von 1 Ganzen; 3 Metzen = 1 mal 1 halbes Schäffel ($^1/_2$ Schfl.) Je nachdem nun irgend eine Zahl auf dieselbe Einheit, oder auf verschiedene Einheiten bezogen wird, ist sie eine ganze Zahl oder eine Bruchzahl.

3 = 3 mal 1, also ist 3 eine ganze Zahl.
3 = 3 mal $^1/_{12}$ von 12, hier aber eine Bruchzahl.
6 Heller = 6 mal 1 Heller – hier sind die 6 Heller eine ganze Zahl;
6 Heller = 6 mal $^1/_2$ Pfenning = $^6/_2$ Pfenninge, oder
6 Heller = 6 mal $^1/_8$ Kreuzer = $^6/_8$ = $^3/_4$ Kreuzer, oder
6 Heller = 6 mal $^1/_{480}$ Gulden = $^6/_{480}$ = $^1/_{80}$ Gulden — hier aber immer eine Bruchzahl.

Vieles, was bisher gesagt worden, ist den Schülern, die in den vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen gründlich unterrichtet sind, schon bekannt; daher gehe der Lehrer, anbindend an das Bekannte, mehr **fragweise** zu Werke, wozu ihm namentlich die anschauliche Darstellung durch Linien oder Striche mit Anlaß gibt. Wichtig ist es, die Versinnlichung an Strichen von den Schülern selbst vornehmen zu lassen, und die einzelnen Fälle auf mannigfache angewandte Beispiele zu übertragen, um den Schülern die Sache noch deutlicher und bleibender zu machen, zugleich auch mehr Abwechslung in den Unterricht zu bringen. Wir wollen dieses an ein Paar Beispielen zeigen. Oben Seite 4 ist die doppelte Entstehung der Brüche anschaulich an Linien nachgewiesen worden, und dieses soll nun noch auf angewandte Beispiele übertragen, d. i. an solchen entwickelt werden. Der Lehrer stelle die Frage: „Wie entsteht der Bruch drei Viertel ($^3/_4$) Gulden?“ — Ein Gulden hat 60 kr. (das wissen die Schüler schon aus den frühern Uebungen mit ganzen Zahlen); 1 Viertel-Gulden oder der vierte Theil von einem Gulden oder von 60 kr. ist 15 kr.; 3 Viertel-Gulden also 3 mal 15 = 45 kr. — Da nun 1 Viertel von 1 Gulden 15 kr. sind, so beträgt 1 Viertel von 2 Gulden 2 mal 15 = 30 kr., und 1 Viertel von 3 Gulden 3 mal 15 = 45 kr. Drei mal der 4. Theil oder drei Viertel von einem Gulden ist also gleich ein mal der 4. Theil oder ein Viertel von drei Gulden. — Ebenso: „Wie entsteht der Bruch $^5/_8$ ℔?“ 1 ℔ hat 32 Loth. Ein Achtel von 1 ℔ = 4 Loth; 5 Achtel-Pfund also 5 mal 4 Loth = 20 Loth. Da 1 Achtel von 1 ℔ = 4 Loth, so muß 1 Achtel von 2 ℔ = 2 mal 4 Loth; 1 Achtel von 3 ℔ = 3 mal 4 Loth rc. sein, und 1 Achtel von 5 ℔ = fünf mal 4 Loth oder 20 Loth betragen. Also ebenfalls 5 mal der achte Theil (fünf Achtel) von einem Pfund = 1 mal der achte Theil (ein Achtel) von fünf Pfunden. Aehnliche Beispiele sind für alle Fälle leicht zu bilden, da Anhaltspunkte im Unterrichtsgange allenthalben gegeben sind. Diese und die folgenden mündlichen Vorübungen sind die Grundlage für das Rechnen mit Brüchen und dürfen durchaus nicht oberflächlich übergangen werden, wenn anders ein gründliches Eingehen, ein klares Auffassen, eine tiefe Einsicht in das Rechnen mit Brüchen bei den Schülern erzielt werden will, was ja der Zweck alles Unterrichts, nicht aber ein Abrichten zu diesen oder jenen Formen ist. Daher schreite der Lehrer nicht eher weiter, als bis die Schüler den Beweis gegeben, daß sie den jedesmaligen Unterricht klar und richtig verstanden und aufgefaßt haben. Behufs dieses lege man ihnen jedes Mal ähnliche, den bei dem Unterrichte abgehandelten Gegenstand betreffende Fragen zur gründlichen Auseinandersetzung vor, wie folgende:

1) Als was kann jede Größe angeschaut werden?
2) Wann ist eine Größe ein Ganzes, wann nur ein Theil eines Ganzen?
3) Nenne ein mehrfaches Ganzes! theile es in gleiche und ungleiche Theile, so daß die Theile selbst immer noch aus vollständigen Einheiten bestehen, und gib die Gründe an, in wiefern diese als Ganze oder als Theile angesehen werden können!

4) Theile auch eine einfache Einheit in ungleiche und gleiche Theile!
5) Wie heißt ein Theil einer in ungleiche Theile getheilten Einheit?
6) Worin besteht der Unterschied zwischen einem in ungleiche Theile getheilten mehrfachen Ganzen, und einer in ungleiche Theile getheilten einfachen Einheit?
7) Woher erhalten die Theile einer in gleiche Theile getheilten Einheit ihren Namen (Benennung)? Gib Beispiele an!
8) Was versteht man in der Zahlenlehre unter dem Worte Bruch?
9) Wie heißt ein Theil einer in 5, 8, 10, 12, 24, 30 *rc.* gleiche Theile getheilten Einheit?
10) Was für Theile erhält man, wenn man eins in 7, 9, 13, 40 *rc.* gleiche Theile theilt?
11) Wie erhält man Drittel, Viertel, Fünftel, Achtel, Neuntel, Zwanzigstel *rc.*?
12) Was heißt ein Fünftel, Neuntel, Elftel, Dreißigstel *rc.*?
13) Was sind sechs Siebentel, sieben Zehntel, elf Zwanzigstel *rc.*?
14) Wie erhält man 3 Viertel, 7 Neuntel, 11 Fünfzehntel *rc.* a) aus dem einfachen, b) aus dem mehrfachen Ganzen?
15) Fünf Achtel sind um wie viel weniger als ein Ganzes? — und was fehlt noch zum Ganzen?
16) Nenne beliebige Brüche und weise nach, wie sie entstanden sind?
17) Auf wie vielfache Weise entstehen also Brüche?
18) Als was kann Jeder, aus mehr als einem Theile bestehender Bruch angesehen werden? und worauf soll jeder solcher Bruch bezogen werden?
19) Inwiefern ist jede Größe ein Bruch?
20) Welcher Unterschied ergibt sich also für ganze und gebrochene Zahlen?

u. dgl. m. u. dgl. m.

2. Benennung der Bruchglieder und Darstellung eines Bruches.

Wie oben anschaulich entwickelt wurde, entsteht der Bruch drei Viertel dadurch, daß ein Ganzes in 4 gleiche Theile getheilt wird, wovon 3 Theile genommen werden. Das Zahlwort „Viertel" gibt uns nebst dem Namen, den die Theile aus dieser Theilung des Ganzen erhalten haben, an, in wie viele gleiche Theile das Ganze getheilt worden ist, und das Zahlwort „drei" sagt, wie viele solche Theile vorhanden sind. Das Wort „Viertel" nennt die Theile, wie sie heißen oder welchen Namen sie haben, und wird daher **Nenner** genannt; das Wort „drei" aber zählt die Theile, gibt die Anzahl der zusammengenommenen Theile an, und heißt deßwegen **Zähler**. Dieser Bruch besteht also aus zwei Gliedern, dem Nenner und dem Zähler, was eben bei allen Brüchen stattfinden muß, weil alle auf dieselbe Weise entstehen, wie der Bruch drei Viertel. Wir haben daher bei jedem Bruche zwei Vorstellungen festzuhalten, nämlich die Vorstellung, in wie viele gleiche Theile irgend eine Einheit getheilt worden ist, was wir aus dem Nenner erkennen, (weil dessen Namen eben aus der Anzahl der Theile, in welche das Ganze zerlegt ist, abgeleitet wird,) und dann die Vorstellung, wie viele dieser Theile vorhanden sind, was uns durch den Zähler bekannt gegeben wird. Daraus sehen wir zugleich, daß der Nenner in doppelter Bedeutung betrachtet werden muß, nämlich als Zahl, insofern man auf die Entstehung eines Bruches Rücksicht nimmt, wobei er nur die Frage: „Wie viele Theile sind aus dem Ganzen gemacht worden?" beantwortet; dann als Namen, insofern man die Größe oder den Werth der Theile zum Ganzen berücksichtigt, in welcher Beziehung er uns auf die Frage: „Was für Theile sind es?" Aufschluß gibt. In diesem letzten Falle kann und darf er nie als Zahl betrachtet werden, obgleich

man bei der schriftlichen Darstellung der Brüche der Kürze wegen auch den Nenner wie den Zähler allgemein durch das entsprechende Zifferzeichen ausdrückt. *) Auf diese zweifache Bedeutung mache der Lehrer seine Schüler aufmerksam und suche ihnen namentlich die letztere Bedeutung recht klar zu machen. — Der Zähler dagegen ist in allen Fällen und immer nur als Zahl zu betrachten, denn er beantwortet nur die Frage: „Wie viele Theile sind vorhanden?"

Obwol bei der Entstehung eines Bruches zuerst gefragt werden muß, in wie viele gleiche Theile ein Ganzes getheilt ist, und dann erst, wie viele von diesen Theilen genommen sind, also zuerst die Vorstellung des Nenners gedacht wird, und dann erst die des Zählers: so wird doch bei dem Aussprechen eines Bruches nicht der Nenner, sondern der Zähler zuerst genannt, und darnach erst der Nenner, gleich wie bei benannten ganzen Zahlen, wobei es allgemein üblich ist, zuerst die Zahlengrößen und hierauf erst die Bezeichnung oder den Namen, welche Art von Dingen gemeint sei, zu benennen. Man spricht z. B. 3 Pfenninge, 9 Ellen, 5 Schäffel, 4 Metzen rc.; folgerichtig auch so bei Brüchen, z. B. 3 Viertel, 5 Achtel, 9 Zwanzigstel rc., weil die Nenner Viertel, Achtel rc. auch nur besagen, welche Art von Bruchtheilen gemeint sei, der Nenner also nur als Namen erscheint. Der Namen ist sowol bei benannten ganzen Zahlen, als auch bei Brüchen die hervortretend hörbare Bezeichnung.

Vorhin ist bereits angedeutet worden, daß man bei der schriftlichen Bezeichnung der Brüche Kürze halber den Zähler und Nenner gewöhnlich in Ziffern darstellt. Dabei hat man ganz willkürlich die Form angenommen, das Zahlzeichen des Zählers über das des Nenners zu setzen und beide durch einen Strich von einander zu trennen; z. B. fünf Achtel — schriftlich dargestellt — $^5/_8$; hier ist 5 der Zähler, 8 der Nenner, welche 8 gelesen werden muß: „Achtel."

Der Bruch $^5/_8$ kann nach früheren Erklärungen in zweifacher Beziehung angeschaut werden, nämlich als 5 zusammengenommene Theile einer in 8 gleiche Theile getheilten Einheit, oder als der 8te Theil von 5 Einheiten. Diese letzte Auffassung kann somit auch als eine Division angesehen werden, wobei der Zähler (5) als Dividend, der Nenner (8) als Divisor und der Bruch ($^5/_8$) selbst als Quotient erscheinen. In dieser Auffassung ist jeder Bruch der Quotient einer Division, deren Dividend der Zähler und deren Divisor der Nenner ist. Diese Vorstellung von der Entstehung der Brüche ist auf alle Fälle anzuwenden, und deßwegen an vielen Beispielen zu üben und zu befestigen, indem man durch Theilen (Division) mit einer größern Zahl in eine kleinere — oder auch umgekehrt — Brüche bilden läßt; z. B. Welches ist der sechste Theil von 5? — von 11? — Antwort $^5/_6$, — $^{11}/_6$ (von eins). Welches ist der 9. Theil von 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8? rc. Wie oft ist 6 in 5, 6 in 11 enthalten. Antwort $^5/_6$, $^{11}/_6$ mal. Wie oft ist 7 in 1, 2, 3, 4, 5, 6 enthalten? u. s. w., und frage: welches ist der Dividend, welches ist der Divisor? wie heißt der Quotient?

*) Wie z. B. das Wort „Pfenninge" zu einer Zahl gesetzt nur benennt, wasfür Dinge es sind, so gibt auch der Nenner, z. B. Viertel, nur den Namen an, wasfür Theile es sind.

Hier kann allenfalls schon aufmerksam gemacht werden, (wenn man dieses nicht auf später verschieben will), daß der Nenner noch eine dritte Bedeutung hat, indem er mit der Reduktions- oder Währungszahl gleichartiger ungleichnamiger Größen zu vergleichen ist. So sind z. B die Zahlen 4, 6, 12, 32, 60 rc. Reduktions- oder Währungszahlen, insofern man dieselben je als die bestimmte Anzahl untergeordneter Größen zu einer Einheit der übergeordneten Größe betrachtet. Wird diese Reduktion der untergeordneten Größe in die übergeordnete wirklich vollzogen, so erscheinen diese Zahlen als Nenner; z. B. 3 pf. = $^3/_4$ kr., 5 Metzen = $^5/_6$ Schfl., 7 Zoll = $^7/_{12}$ Fuß, 13 Loth = $^{13}/_{32}$ ℔, 27 kr. = $^{27}/_{60}$ fl. — Eben in dieser Beziehung ist der Nenner jedes Bruches auch Reduktions- oder Währungszahl, denn der Nenner kann in dieser Hinsicht als eine gewisse Anzahl der untergeordneten Größe zu einer Einheit der übergeordneten betrachtet werden.

Der Lehrer suche auch hier wieder mehr durch umsichtige Fragen, als durch lehrenden Vortrag die Sache mit den Schülern zu entwickeln. Er spricht den Schülern z. B. den Bruch „drei Viertel" vor und läßt denselben auch von diesem und jenem Schüler langsam nachsprechen. Hierauf frägt er: „Wie viele Zahlennamen werden ausgesprochen? Wie ist dieser Bruch entstanden? Welches Zahlwort gibt an, in wie viele Theile das Ganze getheilt ist? Welches sagt, wie viele Theile zusammengenommen wurden? Welches von diesen beiden Wörtern nennt die Theile, wie sie heißen? welches gibt die Zahl der vorhandenen Theile an oder zählt sie gleichsam? — Wie nennt man denjenigen, der lehrt, schreibt, malt, reitet? Wie werden wir also eine Zahl nennen können, die die Theile nennt, wie sie heißen? wie diejenige Zahl, welche die Anzahl der zusammengenommenen Theile gleichsam zählt? Wie viele Vorstellungen müssen wir daher bei jedem Bruche festhalten? welche? Inwiefern können wir den Nenner als Zahl betrachten? Insofern aber derselbe den Theilen den Namen gibt, ist derselbe was nur? Wie viele Loth braucht man zu einem Pfund? Wie heißt diese Zahl 32? Was für eine Größe sind Loth in Beziehung zu Pfund? Wie viele Achtel braucht man zum Ganzen? Als was wird der Nenner in dieser Hinsicht noch angesehen werden können? warum?" und ähnliche Fragen mehr, was mit den vorstehenden nur angedeutet sein will. — Auch lasse der Lehrer Brüche angeben, die auf gleiche Weise, wenn auch jeder nicht so speziell, durchgenommen werden, wobei die Schüler besonders aufmerksam zu machen sind, daß, wenn auch bei Entstehung eines Bruches zuerst der Nenner berücksichtigt werden muß, man doch zuerst den Zähler ausspricht und warum, u. dgl.

3. Eintheilung und Arten der Brüche.

Wir haben bisher schon mannigfache Brüche genannt und sie aus verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet. Von denselben war bald der Zähler, bald der Nenner ein anderer u. s. w. Deßwegen werden die Brüche in verschiedene Arten eingetheilt, wovon die gewöhnlichsten und bekanntesten folgende sind:

a) Von folgenden Brüchen: $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_{10}$, $^1/_{11}$, $^1/_{12}$ rc. bezeichnet jeder nur einen Theil, eines in gleiche Theile getheilten Ganzen. Sie stammen auf die einfachste Weise aus dem in gleiche Theile getheilten Ganzen oder der Einheit ab. Die Brüche: $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$, — $^7/_{10}$, $^5/_{11}$, $^{11}/_{12}$ rc. kann man sich als aus mehren gleichen Theilen zusammengesetzt denken. Jene Brüche nun, welche nur einen von den gleichen Theilen eines Ganzen bezeichnen, nennt man **Stammbrüche**; jene aber, welche mehre solche gleiche Theile einer Einheit bezeichnen, heißen **zusammengesetzte Brüche** oder auch **abgeleitete Brüche**, weil sie durch Zusammensetzung des einfachen Zählers von den Stammbrüchen abgeleitet werden, z. B. $^1/_5 + ^1/_5 + ^1/_5 = ^3/_5$.

b) Von folgenden Brüchen: $^1/_3$, $^3/_5$, $^7/_9$ bezeichnet jeder weniger als ein Ganzes. Ein oder mehre Theile eines in gleiche Theile getheilten Ganzen heißen aber, wie wir aus dem Frühern wissen, Bruch; da-

rum sind diese eigentliche Brüche. Folgende Brüche: $^3/_3$, $^5/_5$, $^8/_8$ sind jedes Mal dem Ganzen, der Einheit, gleich; denn wir wissen, ebenfalls aus den frühern Unterrichtsstunden, daß, wenn ein Ganzes in eine beliebige Zahl gleicher Theile getheilt wird, alle diese Theile zusammengenommen, wieder das Ganze ausmachen. Es sind also $^3/_3 = 1$, $^5/_5 = 1$, $^8/_8 = 1$ u. s. w. Daher kann man auch die Einheit oder ein Ganzes in jedem beliebigen Bruche der Form nach ausdrücken, z. B. $1 = {}^1/_1 = {}^2/_2 = {}^3/_3 = {}^4/_4 = {}^5/_5$ rc. $= {}^{10}/_{10} = {}^{25}/_{25} = {}^{67}/_{67} = {}^{100}/_{100}$ u. s. f. Daraus folgt: Jeder Bruch, dessen Zähler und Nenner einander gleich sind, ist gleich der Einheit, oder der Werth eines solchen Bruches ist gleich der Einheit oder dem Ganzen; und: die Einheit ist jedem Bruche gleich, dessen Zähler und Nenner einander gleich sind. Daraus folgt ferner: Da $1 = {}^1/_1 = {}^2/_2 = {}^3/_3$ rc. so ist $2 = {}^2/_1 = {}^4/_2 = {}^6/_3 = {}^8/_4 = {}^{10}/_5 = {}^{12}/_6$ rc. $= {}^{24}/_{12} = {}^{54}/_{27}$ u. s. w., denn $2 = 2 \times 1$; $3 = {}^3/_1 = {}^6/_2 = {}^9/_3 = {}^{12}/_4 = {}^{15}/_5 = {}^{18}/_6$ rc. $= {}^{42}/_{14} = {}^{66}/_{22}$ u. s. w., denn $3 = 3 \times 1$; $7 = {}^7/_1 = {}^{14}/_2 = {}^{21}/_3 = {}^{28}/_4 = {}^{35}/_5 = {}^{42}/_6$ rc. $= {}^{77}/_{11} = {}^{105}/_{15}$ u. s. w., denn $7 = 7 \times 1$.

Hier ist jedes Mal der Zähler größer als der Nenner um eben so vielmal, als das Ganze Einheiten hat. Dies ist leicht erklärlich aus der Darstellung der Einheit in Bruchform, und kann auch nicht anders sein, denn da z. B. 1 = 3 Drittel ist, so sind 3 mal 1 = 3 mal 3 Drittel oder 9 Drittel = $^9/_3$; 7 eben deßwegen 7 mal 3 Drittel oder 21 Drittel ($^{21}/_3$) u. s. w. Der Zähler muß also jedes Mal den Nenner um das Sovielfache übersteigen, als Einheiten die Zahl enthält.

Aus diesen Beispielen sehen wir, daß jede ganze Zahl in Form eines Bruches (in Bruchform) dargestellt werden kann. Da aber solche Brüche jedes Mal gerade eine Einheit, oder mehre Einheiten geben, d. h. ihr Werth gerade einem einfachen, oder einem mehrfachen Ganzen vollkommen gleich ist, so sind es eigentlich keine Brüche, wenn gleich sie die Form der Brüche haben, und heißen deßwegen mit Recht uneigentliche Brüche. Sonach unterscheiden wir wieder: **Eigentliche Brüche,** d. h. solche, welche weniger als ein Ganzes bezeichnen, bei denen also der Zähler stets kleiner ist als der Nenner, dieser demnach in dem Zähler nicht ganz enthalten ist; sodann **uneigentliche Brüche,** d. h. solche, welche gerade ein oder mehre Ganze ausmachen, bei denen der Zähler entweder gerade so groß, oder um ein Vielfaches größer ist als der Nenner. In diesem Falle muß der Nenner in dem Zähler ohne Rest enthalten sein.

c) Von den beiden Brüchen: $^5/_8$ und $^{11}/_8$ bezeichnet der erste weniger als ein Ganzes (als eins), der zweite aber mehr als eins; dieser zeigt an, daß 11, jener, daß nur 5 Theile eines in 8 gleiche Theile getheilten Ganzen vorhanden seien. Es kann also ein Bruch, oder eine Zahl in Bruchform dargestellt, kleiner oder auch größer als ein Ganzes sein. Ist er kleiner, so heißt er ein ächter Bruch; ist dessen Werth größer (ohne jedoch gerade mehren Ganzen vollkommen gleich zu sein), so heißt er ein unächter Bruch. Aechte Brüche entstehen auch durch Division mit einer größern Zahl in eine kleinere; unächte durch Division mit einer kleinern in eine größere Zahl, in welch letztern die kleinere aber

nicht ohne Rest enthalten ist. Ein **ächter Bruch** ist demnach ein solcher, dessen Werth weniger oder der kleiner ist als 1 (< 1), bei dem der Zähler kleiner ist als der Nenner; ein **unächter Bruch** ein solcher, dessen Werth größer ist als 1 (> 1), bei dem der Zähler größer als der Nenner.

Führt man einen unächten Bruch durch Division des Zählers mit dem Nenner auf das oder die Ganzen zurück, d. h. untersucht man, wie viele Ganze derselbe enthält, z. B. $^{11}/_8 = 1^3/_8$, so erhält man ein oder mehre Ganze und einen ächten Bruch. Solche Zahlen, bei denen eine ganze Zahl mit einem Bruche in Verbindung steht, heißen **gemischte Zahlen.** Aus gemischten Zahlen kann also auch durch Auflösen der ganzen Zahl in dieselben Bruchtheile des dabeistehenden Bruches wieder ein unächter Bruch entstehen, wie umgekehrt; z. B. $2^1/_3 = ^7/_3$.

d) Die Brüche $^1/_9$, $^4/_9$, $^5/_9$, $^6/_9$, $^8/_9$, haben sämmtlich ein und dieselbe Benennung, einen gleichen Nenner, und heißen deßwegen gleichnennerige oder gleichnamige Brüche. Von folgenden Brüchen aber, nämlich $^1/_2$, $^3/_5$, $^6/_7$, $^7/_9$, hat jeder einen andern Nenner, und heißen daher ungleichnamige oder ungleichbenannte Brüche. **Gleichnamige Brüche** sind es, wenn zwei oder mehre Brüche ein und denselben Namen oder Nenner haben; **ungleichbenannte Brüche** sind es, wenn von zwei oder mehren Brüchen jeder einen andern Nenner oder Namen hat.

e) Oben ist gezeigt worden, daß jeder Bruch aus zwei Gliedern oder Theilen bestehe, nämlich aus dem Zähler und dem Nenner. Bei den Brüchen $^1/_5$, $^3/_8$, $^4/_4$, $^9/_7$, $^{12}/_6$ können einfach nur diese beiden Glieder, Zähler und Nenner, unterschieden werden und heißen daher einfache Brüche. Im gewöhnlichen bürgerlichen Verkehre schon kommt nicht selten der Ausdruck: „Ein halbes Viertel" $\left(\frac{1/2}{4}\right)$ vor. Dieser Ausdruck bezeichnet, daß der ursprüngliche Theil eines Ganzen, nämlich der Bruch ein Viertel, nur halb oder $^1/_2$ mal zu nehmen sei; oder daß nur $^1/_4$ von $^1/_2$, d. i. der vierte Theil von einem Halben genommen ist. So heißt auch $\frac{1^1/_2}{3}$ nichts anderes, als daß der dritte Theil einer in 3 gleiche Theile getheilten Einheit $1^1/_2$ mal zu nehmen sei, oder der dritte Theil von $1^1/_2$, oder wie oft ist 3 in $1^1/_2$ enthalten. Bei dieser Darstellung hat also der Zähler oder Nenner eines Bruches abermals einen Bruch; ein solcher Bruch besteht aus zwei Brüchen vereinigt und heißt daher Doppelbruch. Auch diese Brüche sind nur als Quotienten einer Division anzusehen, wovon die Zähler Dividenden und die Nenner Divisoren sind. Daß auch gemischte Zahlen Zähler oder Nenner, oder Zähler und Nenner der Doppelbrüche sein können, versteht sich wol von selbst; z. B. $\frac{2^1/_2}{4}$, $\frac{3}{2^2/_3}$, $\frac{4^3/_4}{6^2/_5}$ *)

Einfache Brüche sind alle jene, deren Zähler und Nenner nicht schon selbst wieder Brüche sind; **Doppelbrüche** jene, deren Zähler oder Nenner, oder deren Zähler und Nenner selbst schon Bruchzahlen sind.

---

*) $4^3/_4$ ist hier der Zähler und $6^2/_5$ der Nenner. Dieser Bruch zeigt an, daß $4^3/_4$ durch $6^2/_5$ getheilt, oder untersucht werden soll, wie oft $6^2/_5$ in $4^3/_4$ enthalten

f) Die Brüche $^2/_3$, $^4/_5$, $^{11}/_{16}$, und $^2/_3$ fl., $^4/_5$ Ellen, $^{11}/_{16}$ Ruthen unterscheiden sich insofern von einander, daß in dem einen Falle nicht, wol aber im andern Falle angegeben ist, welche Art von Dingen gemeint ist; jene heißen **unbenannte**, diese **benannte Brüche.**

Fassen wir dies Alles kurz zusammen, so ergeben sich folgende Arten von Brüchen:

1. Stammbrüche, $^1/_3$, $^1/_7$, $^1/_{16}$ ꝛc.
2. Abgeleitete oder zusammengesetzte Brüche: $^5/_6$, $^3/_8$, $^{14}/_{15}$ ꝛc.
3. Eigentliche Brüche: $^1/_4$, $^5/_8$, $^9/_{13}$ ꝛc.
4. Uneigentliche Brüche: $^6/_6$, $^{17}/_{17}$, $^{16}/_8$, $^{21}/_3$ ꝛc.
5. Aechte Brüche $^1/_2$, $^4/_7$, $^{11}/_{18}$ ꝛc,
6. Unächte Brüche: $^5/_4$, $^9/_6$, $^{27}/_8$ ꝛc., aus welchen die gemischten Zahlen entstehen, z. B. $^5/_4 = 1^1/_4$, $^9/_6 = 1^3/_6$, $^{27}/_8 = 3^3/_8$.
7. Gleichnamige Brüche: $^1/_{12}$, $^5/_{12}$, $^7/_{12}$ ꝛc.
8. Ungleichnamige Brüche: $^1/_5$, $^3/_7$, $^{13}/_{16}$ ꝛc.
9. Einfache Brüche: $^1/_7$, $^6/_{11}$, $^8/_8$, $^{13}/_9$ ꝛc.
10. Doppelbrüche: $\frac{^1/_2}{3}$, $\frac{^2/_3}{5}$, $\frac{4^1/_3}{4}$, $\frac{2}{3^4/_5}$ ꝛc.
11. Unbenannte Brüche: $^5/_8$, $^7/_3$, $^{16}/_{25}$. ꝛc.
12. Benannte oder angewandte Brüche: $^5/_6$ ℔, $^{13}/_{14}$ Maß, $^{27}/_{50}$ Ellen ꝛc..

Es gibt zwar noch andere Eintheilungsarten der Brüche, wie z. B. gemeine Brüche, Decimalbrüche, Sexagesimalbrüche; doch die eben genannten Arten sind die bekanntesten, deren Kenntniß auf dieser Stufe ausreichend ist.

Daß ein Bruch oft mehren dieser Arten angehören kann, wird schon aus der obigen Zusammenstellung ersichtlich sein; z. B. $^5/_8$ ist ein abgeleiteter, ein eigentlicher, ein ächter, ein einfacher Bruch; $^6/_3$ ist ein uneigentlicher, ein einfacher Bruch; $^1/_5$ und $^4/_5$ sind gleichnamige, eigentliche, ächte Brüche; $^5/_6$ und $^4/_9$ sind ungleichnamige, einfache ꝛc. Brüche; $\frac{^2/_3}{5}$ ist ein Doppelbruch, ein eigentlicher, ein ächter Bruch u. s. w.

Bei umsichtiger Leitung von Seite des Lehrers werden die Schüler diese Verschiedenheit der Brüche größtentheils selbst zu entdecken im Stande sein. Jede Art der Brüche lasse der Lehrer immer sogleich an vielen Beispielen üben, damit sich das gewonnene Resultat bei den Schülern recht befestige. Der Lehrer spreche Brüche vor, und die Schüler haben die Art, zu welcher sie gehören, anzugeben; oder er fordert sie auf, 2, 3 und mehre Stammbrüche, ebenso abgeleitete Brüche anzugeben — solche zu benennen, welche Fünftel, Sechstel, Dreizehntel ꝛc. sind; oder er spricht: „Gebt Stammbrüche an, deren Nenner 4, 6, 7 ꝛc. ist! Nennt zwei eigentliche Brüche, zwei uneigentliche, die gerade ein Ganzes, 2, 3 ꝛc. Ganze sind! Gebt Brüche an, bei denen Zähler und Nenner gleich sind, — deren Zähler 2, 3, 4 mal größer ist als der Nenner! Nennt ächte — unächte Brüche! Welche von folgenden Brüchen sind ächte: $^3/_7$, $^8/_5$, $^7/_3$, $^5/_8$ ꝛc.? Gebt zwei (mehre) gleichnamige — ungleichnamige Brüche an! Welche von folgenden Brüchen sind gleich-, welche ungleichbenannte? u. s. w." Oder der Lehrer schreibe

---

ist. Recht klar wird die Sache hierüber erst, wenn die Division der Brüche abgehandelt ist, und so ist es vorderhand genügend, die eigenthümliche Form dieser Brüche und deren Begriff den Schülern vorzuführen.

mehre Brüche an die Tafel und fordere die Schüler auf, anzugeben, zu welcher Art von Brüchen jeder gehöre ꝛc. Die Gründe für die Behauptung müssen in jedem Falle gefordert werden. Endlich kann noch verlangt werden, zu welchen verschiedenen Arten ein und derselbe Bruch gehöre und aus welchen Gründen. Oft wird die Sache durch benannte Brüche noch anschaulicher, daher es sehr zweckmäßig ist, die Unterschiede der Bruch_arten durch angewandte Beispiele anschaulicher zu machen; z. B. $^3/_4$ fl. ist ein ächter Bruch; denn er bezeichnet weniger als ein Ganzes, und der Zähler ist kleiner als der Nenner. Der Gulden hat 60 kr; ein Viertel-Gulden = 15 kr.; 3 Viertel-Gulden = 3 mal 15 kr. = 45 kr., und es fehlen also noch 15 kr. zum ganzen Gulden. — $^4/_3$ fl. ist ein unächter Bruch; denn 1 Drittel-Gulden = 20 kr.; 4 Drittel-Gulden = 4 mal 20 kr. = 80 kr. oder 1 fl. 20 kr., also mehr als ein ganzer Gulden. Mehre solche Beispiele!

4. Das Bilden uneigentlicher, ächter und unächter Brüche aus ganzen und gemischten Zahlen.

Das Bilden solcher Brüche ist schon im Vorhergehenden (S. 10) gezeigt worden, und kann hier noch zu mehrer Uebung und Befestigung wiederholt werden.

a) Das Bilden uneigentlicher Brüche aus ganzen Zahlen. Oben (S. 12) ist gezeigt und noch früher an Strichen anschaulich gemacht worden, daß ein Ganzes zwei Halbe, drei Drittel, vier Viertel, fünf Fünftel u. s. w. hat. $1 = {}^1/_1 = {}^2/_2 = {}^3/_3 = {}^4/_4 = {}^5/_5$ u. s. w.

Daher sind:

2 Ganze $= 2 \times {}^2/_2 = {}^4/_2$, oder $2 \times {}^3/_3 = {}^6/_3$, oder $2 \times {}^4/_4 = {}^8/_4$ ꝛc.
3 „ $= 3 \times {}^2/_2 = {}^6/_2$, „ $3 \times {}^3/_3 = {}^9/_3$, „ $3 \times {}^4/_4 = {}^{12}/_4$ ꝛc.
4 „ $= 4 \times {}^2/_2 = {}^8/_2$, „ $4 \times {}^3/_3 = {}^{12}/_3$, „ $4 \times {}^4/_4 = {}^{16}/_4$ ꝛc.
5 „ $= 5 \times {}^2/_2 = {}^{10}/_2$, „ $5 \times {}^3/_3 = {}^{15}/_3$, „ $5 \times {}^4/_4 = {}^{20}/_4$ ꝛc.
9 „ $= 9 \times {}^2/_2 = {}^{18}/_2$, „ $9 \times {}^3/_3 = {}^{27}/_3$, „ $9 \times {}^4/_4 = {}^{36}/_4$ ꝛc.
10 „ $= 10 \times {}^2/_2 = {}^{20}/_2$, „ $10 \times {}^3/_3 = {}^{30}/_3$, „ $10 \times {}^4/_4 = {}^{40}/_4$ ꝛc.
25 „ $= 25 \times {}^2/_2 = {}^{50}/_2$, „ $25 \times {}^3/_3 = {}^{75}/_3$, „ $25 \times {}^4/_4 = {}^{100}/_4$ ꝛc.

Ebenso:

8 Ganze $= 8 \times {}^5/_5 = {}^{40}/_5$, oder $8 \times {}^8/_8 = {}^{64}/_8$ oder $8 \times {}^{15}/_{15} = {}^{120}/_{15}$ ꝛc.

Das Bilden dieser Brüche in solchen Reihen ist eine sehr gute Uebung und kann auch als stille Beschäftigung für die Schüler mit Nutzen betrieben werden.

Daraus sehen wir, daß jede ganze Zahl in einen uneigentlichen Bruch von einem beliebigen Nenner verwandelt werden kann, indem man die ganze Zahl mit irgend einem gegebenen Nenner multiplizirt; das entstehende Produkt gibt den Zähler und der gegebene Nenner ist natürlich der Nenner dieses Bruches. Z. B. 20 sind wie viele Sechstel?

$20 \times {}^6/_6 = {}^{120}/_6$; denn $1 = {}^6/_6$; $20 = 20 \times 1$, also $20 \times {}^6/_6 = {}^{120}/_6$.

Man nennt dieses Verfahren auch das Auflösen (Resolviren) ganzer Zahlen in Halbe, Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel u. s. w.

Aufgaben.

Von angewandten Zahlen sind hier folgende und ähnliche passend:

1) 5 Metzen geben wie viele halbe, Drittel-, Viertel-, Fünftel-Metzen? (Antwort. 10 halbe, oder 15 Drittel-, oder 20 Viertel-, oder 25 Fünftel-Metzen ꝛc.; denn 1 Metzen $= {}^2/_2 = {}^3/_3 = {}^4/_4 = {}^5/_5$ ꝛc; daher 5 Metzen $= 5 \times {}^2/_2 = {}^{10}/_2$, $5 \times {}^3/_3 = {}^{15}/_3$, $5 \times {}^4/_4 = {}^{20}/_4$, $5 \times {}^5/_5 = {}^{25}/_5$ ꝛc.)

2) 9 ℔ geben wie viele halbe, Drittel-, Fünftel-, Achtel-Pfund ꝛc.?

3) 18 fl. geben wie viele Sechstel-, Achtel-, Zwölftel-Gulden 2c.?
4) 27 Ztr. „ „ „ Drittel-, Neuntel-, Zwanzigstel-Ztr. 2c.?
5) Verwandle 14 Dreißiger in Viertel-, Achtel-, Zwölftel-Dreißiger 2c.!
6) Bilde aus 45 Klafter Zehntel-, Zwanzigstel-, Dreißigstel-Klafter!
7) Jemand nimmt 60 fl. in lauter Fünftel-Gulden, dann 78 fl. in lauter Zehntel-Gulden ein: wie viele Stücke Fünftel-, und wie viele Zehntel-Gulden sind es?
8) Ein Weinhändler will 97 Maß Wein in lauter Halbe-Maß-Bouteillen füllen; wie viele hat er nöthig?
9) In einer Haushaltung wird wochentlich ein Sechstel-Schäffel Brodmehl verbacken, wie lange reicht man mit 37 Schäffel Mehl?
(Antwort: 222 Wochen: denn 1 Schffl. = 6 Sechstel-Schffl. 37 Schffl. = 37 × 6 = 222 Sechstel-Schffl., à 1 Woche = 222 Wochen.)
10) Ein Kaufmann verpackt 57 ℔ Kaffee in lauter Düten zu ein Achtel-Pfund; wie viele solche Düten sind es?
11) Ein vermöglicher Schulfreund übergab dem Lehrer des Ortes 25 fl., um dieses Geld bei dem nächsten Kinderfeste unter die Schuljugend zu vertheilen; wie viele Kinder zählt die Schule, wenn jedes einen Zwölftel-Gulden erhielt?
12) Wer täglich ein Sechzehntel-Pfund Tabak verraucht, wie viele Tage würde er mit einem Vorrathe von 40 ℔ ausreichen?
13) Ein Metzen Mehl wird unter Arme vertheilt; wie viele solche Personen waren es, wenn jede einen Drittel-Dreißiger erhielt?
(Antwort: 96 Personen; denn 1 Metzen = 32 Dreißiger. 1 Dreißiger = $^3/_3$ Dreißiger, 32 Dreißiger = 32 × 3 = 96 Drittel-Dreißiger, und da eine Person 1 Drittel-Dreißiger erhält, so müssen es auch 96 Personen sein.)
14) Ein Kaufmann läßt 1 ℔ feine Gewürze in lauter Achtel-Loth abwiegen und in Düten bringen; wie viele Düten braucht er hiezu?
15) Jemand konnte einen halben Zentner Kaffee gerade vortheilhaft kaufen; wenn davon nun täglich ein Sechzehntel-Pfund verbraucht wird, wie lange wird man ausreichen?

b) **Bilden ächter, unächter und uneigentlicher Brüche aus ganzen Zahlen durch Division.** Aechte Brüche entstehen, wenn mit einer **größern Zahl** in eine **kleinere** dividirt wird, z. B. 5: 3 = $^3/_5$; denn der fünfte Theil von 1 ist ein Fünftel; von 3 also 3 mal 1 Fünftel oder 3 Fünftel. (5: 1 = $^1/_5$; 3 = 3 × 1, also 5:3 = $^3/_5$). Ebenso 7: 4 = $^4/_7$; 20: 11 = $^{11}/_{20}$ 2c. Hier können ebenfalls Reihen gebildet werden, als:

2 : 1 = $^1/_2$	3: 2 = $^2/_3$	4: 3 = $^3/_4$	5: 4 = $^4/_5$	6: 5 = $^5/_6$
3 : 1 = $^1/_3$	4: 2 = $^2/_4$	5: 3 = $^3/_5$	6: 4 = $^4/_6$	7: 5 = $^5/_7$
4 : 1 = $^1/_4$	5: 2 = $^2/_5$	6: 3 = $^3/_6$	7: 4 = $^4/_7$	8: 5 = $^5/_8$
5 : 1 = $^1/_5$	6: 2 = $^2/_6$	7: 3 = $^3/_7$	8: 4 = $^4/_8$	9: 5 = $^5/_9$

Unächte und uneigentliche Brüche entstehen, wenn die Division mit einer **gleich großen**, oder mit einer **kleinern Zahl** in eine **größere** nur in der gewöhnlichen Bruchform angezeigt wird; z. B. 4: 4 = $^4/_4$ (uneigentl. Bruch; 7: 21 = $^{21}/_7$ (uneigentl. Bruch;) 9: 23 = $^{23}/_9$ (unächter Bruch) u. s. w. — Man nimmt also hier die gegebene Zahl, welche getheilt werden soll (Dividend) zum **Zähler**, und die, mit der getheilt werden soll (Divisor) zum Nenner. In Reihen:

2 : 3 = $^3/_2$ (unächt. Bruch)	3 : 3 = $^3/_3$ (uneigtl. Brch.)	4 : 4 = $^4/_4$
2 : 4 = $^4/_2$ (uneigtl. Bruch)	3 : 4 = $^4/_3$ (unächt. Brch.)	4 : 5 = $^5/_4$
2 : 5 = $^5/_2$	3 : 5 = $^5/_3$	4 : 6 = $^6/_4$
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

Aufgaben.

1) Wasfür und welche Brüche entstehen, wenn 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 durch die Zahl 5 dividirt werden?

2) Wie heißen die Brüche, die durch Division mit der Zahl 24 in die Zahlen 7, 8, 9, 10, 11, 18, 23, 27 entstehen?
3) Wie groß ist der 5. Theil von 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 ꝛc.; — der 8. Theil von 3, 5, 7, 9, 12, 16, 21 ꝛc.?
4) Wie heißt der 6. Theil a) von 1 fl., b) von 1 ℔, c) von 1 Metzen, d) von 1 Elle, e) von 1 Ztr.?
5) Gib an den 8. Theil a) von 1 Thaler, b) von 3 Thlr., c) von 5 Thlr., d) von 6 Thlr., e) von 8 Thlr., f) von 18 Thlr.!
6) Gib an a) den 5., b). den 6., c) den 7., d) den 9. Theil von 1 fl., von 2 Ellen, von 3 ℔, von 4 Mtz., von 5 Ztr., von 9 Schffl., von 24 Ruthen! und bestimme zugleich, wie viel der Bruch weniger oder mehr als ein Ganzes ist!
7) Unter 7 Arme werden 4 Metzen Mehl und 9 fl. an Geld vertheilt; wie viel erhält jeder?
8) 15 fleißige Schüler erhalten am Prüfungstage als besonderes Geschenk 7 fl, 15 Beistifte und 45 Federn, wie groß ist der Antheil eines jeden?
9) 20 Pferde brauchen in einer gewissen Zeit 12 Schfl. Haber: wie viel traf auf ein Pferd?
10) Der Wirth eines kleinen Marktes braucht wochentlich 5 ℔ Kaffee und 9 ℔ Zucker; wie viel von jeder Sorte täglich im Durchschnitte? wie viel Gewicht überhaupt?
11) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ꝛc. Pfenninge sind je wie viele Kreuzer?
12) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ꝛc. Heller " " " " "
13) 6, 9, 10, 12, 30, 60, 80 kr. ꝛc. sind je wie viele Gulden?
14) 1, 4, 6, 8, 10, 12, 18, 36 ꝛc. Zoll sind je wie viele Fuß?
15) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ꝛc. Loth sind je wie viele Pfund?

Daß, um die letzten 5 Aufgaben zu lösen, die Reduktions- oder Währungszahlen bekannt sein müssen, versteht sich wol von selbst. Diese sind: für Pfenninge in Kreuzer 4, für Heller in Kreuzer 8, für Kreuzer in Gulden 60, für Zoll in Fuß 10 oder 12, für Loth in Pfund 32. Es ist daher 1 pf. $= \frac{1}{4}$ kr., 1 Hll. $= \frac{1}{8}$ kr., 1 kr. $= \frac{1}{60}$ fl., 1 Zoll $= \frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{12}$ Fuß, 1 Loth $= \frac{1}{32}$ ℔; daher also 2 pf. $= \frac{2}{4}$ kr., 13 Hll. $= \frac{13}{8}$ kr., 9 kr. $= \frac{9}{60}$ fl. 11 Zoll $= \frac{11}{10}$ oder $\frac{11}{12}$ Fuß, 7 Loth $= \frac{7}{32}$ ℔. Die gegebene Anzahl der benannten Größe nimmt man also zum Zähler und die Reduktionszahl zum Nenner. Ist der Zähler größer als der Nenner, so ist es auch hier entweder ein uneigentlicher, oder ein unächter Bruch; z. B. 6 Metzen $= \frac{6}{6}$ Schfl., 9 Quint $= \frac{9}{4}$ Loth. — Solche Aufgaben sind viele zu geben.

c) Bilden unächter Brüche aus gemischten Zahlen. $2\frac{2}{3}$ ist eine gemischte Zahl. Soll diese in einen unächten Bruch verwandelt werden, so darf man nur die Ganzen in Drittel auflösen, weil der angehängte Bruch auch Drittel bezeichnet. $1 = \frac{3}{3}$; $2 = 2 \times \frac{3}{3} = \frac{6}{3}$, zu welchen noch die bei den Ganzen stehenden 2 Drittel kommen, nämlich $\frac{6}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$; daher $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.

Daraus sehen wir, daß aus einer gemischten Zahl ein unächter Bruch entsteht, wenn das oder die Ganzen in dieselben Theile aufgelös't werden, die der Nenner des damit verbundenen Bruches anzeigt, und der Zähler des Bruches noch zu den erhaltenen Theilen hinzugezählt wird, d. h. wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches vervielfacht und zu dem dadurch erhaltenen Produkte noch den Zähler des beigesetzten Bruches addirt; diese Summe ist der Zähler und der im Bruch gegebene Nenner auch der Nenner des unächten Bruches. Dieses Verfahren heißt Einrichten oder Auflösen der gemischten Zahlen.

Das Bilden unächter Brüche in Reihenfolgen ist fleißig zu üben; z. B.

$1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$	$1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$	$1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$	$1\frac{3}{5} = \frac{8}{5}$
$2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$	$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$	$2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$	$2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ ꝛc.	$2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$
$3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$	$3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$	$3\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$	$1\frac{2}{4} = \frac{6}{4}$	$3\frac{3}{5} = \frac{18}{5}$
$4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$	$4\frac{1}{3} = \frac{13}{3}$	$4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$	$2\frac{2}{4} = \frac{10}{4}$ ꝛc.	$4\frac{3}{5} = \frac{23}{5}$ ꝛc.
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

Aufgaben.

1) Wasfür ein unächter Bruch entsteht aus der gemischten Zahl $4^4/_5$? (Antwort: $^{24}/_5$; denn $1 = {}^5/_5$; $4 = 4 \times 1$, daher $4 \times {}^5/_5 = {}^{20}/_5$; $^{20}/_5 + {}^4/_5 = {}^{24}/_5$. Oder kürzer: $4 \times 5 = 20$; $20 + 4 = 24$; also $4^4/_5 = {}^{24}/_5$.)
2) Verwandle $5^1/_5$, $7^2/_3$, $6^3/_4$, $4^5/_6$, $3^7/_{12}$ in unächte Brüche!
3) Wie viele Achtel machen 9 Ganze und 7 Achtel.
4) 22 Pfund und 1 Viertelpfund sind wie viele Viertelpfund?
5) $17^2/_3$ Ztr. sind wie viele Drittel-Zentner?
6) $7^3/_8$ Kreuzer — wie viele Achtel-Kreuzer?
7) $5^7/_{10}$ Buch Papier — wie viele Zehntel-Buch?
8) $4^5/_{12}$ Eimer — wie viele Zwölftel-Eimer?
9) Wer zu 5 fl. noch 7 Zwanzigstel-Gulden einnimmt, hat nun wie viele Zwanzigstel-Gulden?
10) Ein Kaufmann erhält 8 Zentner Zucker; in seinem Laden hat er noch 5 Sechstel-Ztr. Zucker vorräthig; wie viele Sechstel-Ztr. hat er jetzt überhaupt?
11) Eine Bäuerin verkaufte auf dem Wochenmarkt 7 ℔ Butter und $3^5/_8$ ℔ blieben unverkauft; wie viele Achtel-Pfund hatte sie zu Markte gebracht?
12) Ein Weinwirth hat zwei Fässer Wein, a) mit $3^2/_9$ Eimer und b) mit $4^5/_9$ Eimer; wie viele Neuntel-Eimer hält jedes Faß? — und beide zusammen?
13) Ein Posthalter braucht für seine Pferde täglich $2^5/_{12}$ Schfl. Haber. Wie viele Pferde hat er, wenn jedes Pferd täglich ein Zwölftel-Schäffel Haber erhält?
14) Die Lehrer einer Stadt nehmen monatlich $73^5/_6$ fl. an Schulgeld ein; wie groß ist die Schülerzahl, wenn jeder Schüler monatlich einen Sechstel-Gulden zahlt?
15) Zur Aufrechthaltung der gesetzlichen Ordnung werden in den Ort G. Executions-Truppen gelegt. Die Gemeinde muß täglich $162^4/_5$ fl. Executionsstrafe an die Mannschaft zahlen. Wie viele Soldaten sind dahin gelegt worden, wenn jeder Mann täglich einen Fünftel-Gulden bekommt?

5. Zurückführen uneigentlicher und unächter Brüche in ganze und gemischte Zahlen.

Die Brüche $^4/_4$ und $^{12}/_4$ sind nach früherer Entwickelung uneigentliche Brüche, weil ersterer gerade ein Ganzes, letzterer gerade drei Ganze macht; denn 4 Viertel = 1 Ganzes, daher 2 mal 4 oder = 8 Viertel = 2 Ganze, und 3 mal 4 oder 12 Viertel = 3 Ganze; d. h. 4 Viertel und 12 Viertel sind so viel mal ein Ganzes, als 4 Viertel (der Nenner) in 4 Viertel und in 12 Viertel (den Zählern) enthalten sind, nämlich $^4/_4 = 1$, und $^{12}/_4 = 3 \times {}^4/_4 = 3$ Ganze, oder $4 : 4 = 1$, und $4 : 12 = 3$.

Die Brüche $^5/_4$ und $^{15}/_4$ enthalten mehr als ein Ganzes. $^5/_4 = {}^4/_4 + {}^1/_4$; $^4/_4 = 1$ Ganzes, daher $^5/_4 = 1^1/_4$. — $^{15}/_4 = {}^{12}/_4 + {}^3/_4 = 3 \times {}^4/_4 + {}^3/_4 = (3 \times 1) + {}^3/_4 = 3$ Ganze und $^3/_4$; also sind $^{15}/_4 = 3^3/_4$; oder $^{15}/_4 = 4$ in 15 ist 3 mal enthalten, bleibt $3 = {}^3/_4$ zum Rest; also $^{15}/_4 = (4 : 15) = 3^3/_4$. — Bei dem ersten Bruche ist der Nenner in dem Zähler ein mal enthalten und es bleibt noch 1 (ein Viertel) zum Rest; bei dem letztern aber drei mal mit dem Reste 3 (3 Viertel). Solche Brüche heißen unächte, und es ist ihr charakteristisches Merkmal, daß ihr Nenner nie rein in dem Zähler aufgeht, sie also nebst Ganzen immer noch einen Bruch zum Reste lassen, d. h. eine gemischte Zahl geben.

Daraus folgt: Uneigentliche und unächte Brüche werden in ganze und gemischte Zahlen verwandelt, indem man untersucht, wie oft der Nenner in dem Zähler enthalten ist, d. h. man dividirt mit dem Nenner in den Zähler; der Quotient bezeichnet die Ganzen und der Rest (bei unächten Brüchen) gibt den Zähler des den Ganzen beizusetzenden

Bruches, der den Divisor (den Nenner des unächten Bruches) zum Nenner hat.

Ferner folgt daraus, daß das Zurückführen uneigentlicher und unächter Brüche in ganze und gemischte Zahlen der **Division mit ganzen Zahlen** entspricht, indem der Nenner (der hier namentlich auch als Reduktionszahl gedacht werden kann,) **Divisor** und der Zähler **Dividend** ist. Hierüber ein paar Beispiele! a) $^{24}/_{6}$ — b) $^{37}/_{8}$ wie viele Ganze?

6: 24 = 4 mal; also $^{24}/_{6} = 4$ Ganze. (Ein Ganzes hat 6 Theile).

8: 37 = 4 mal, Rest 5; also $^{37}/_{8} = 4^{5}/_{8}$. (Ein Ganzes hat 8 Theile.)

Hier können ebenfalls Uebungen in Reihen mit Nutzen angestellt werden, z. B.

$^{3}/_{2}=1^{1}/_{2}$	$^{4}/_{3}=1^{1}/_{3}$	$^{5}/_{4}=1^{1}/_{4}$	od. $^{100}/_{2}=50$	$^{100}/_{3}=33^{1}/_{3}$	od. $^{100}/_{2}=50$	ꝛc.
$^{4}/_{2}=2$	$^{5}/_{3}=1^{2}/_{3}$	$^{6}/_{4}=1^{2}/_{4}$	od. $^{99}/_{2}=49^{1}/_{2}$	$^{99}/_{3}=33$	od. $^{100}/_{3}=33^{1}/_{3}$	ꝛc.
$^{5}/_{2}=2^{1}/_{2}$	$^{6}/_{3}=2$	$^{7}/_{4}=1^{3}/_{4}$	od. $^{98}/_{2}=49$	$^{98}/_{3}=32^{2}/_{3}$	od. $^{100}/_{4}=25$	ꝛc.
$^{6}/_{2}=3$	$^{7}/_{3}=2^{1}/_{3}$	$^{8}/_{4}=2$	od. $^{97}/_{2}=48^{1}/_{2}$	$^{97}/_{3}=32^{1}/_{3}$	od. $^{100}/_{5}=20$	ꝛc.
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	

Sämmtliche Uebungen in Reihenfolgen, wie sie angedeutet wurden, sind noch darum wichtig, weil sie, wenn sie fleißig betrieben werden, die Schüler zu großer Fertigkeit im Multipliciren und Dividiren bringen und den schwächern Schülern, die hierin noch etwas unsicher arbeiten, zugleich eine zweckmäßige Wiederholung und nützliche Nachübung an die Hand geben.

Aufgaben.

1) $^{3}/_{5}$, $^{5}/_{5}$, $^{7}/_{4}$, $^{12}/_{6}$, $^{8}/_{2}$, $^{9}/_{5}$, $^{13}/_{7}$ fl. u. s. w., sind wie viele Gulden?
2) $^{9}/_{2}$, $^{14}/_{6}$, $^{23}/_{5}$, $^{32}/_{8}$, $^{50}/_{3}$ ℔ ꝛc. sind wie viele Pfund?
3) $^{10}/_{4}$, $^{20}/_{4}$, $^{30}/_{4}$, $^{40}/_{4}$, $^{50}/_{4}$ Ellen sind wie viele Ellen?
4) Wie oft ist 1 in $^{5}/_{5}$, $^{18}/_{6}$, $^{28}/_{7}$, $^{40}/_{8}$, $^{45}/_{9}$, $^{60}/_{20}$ enthalten?
5) In einer Rolle sind 45 Geldstücke, jedes zu ein Fünftel-Gulden; wie viele Gulden machen diese?
6) Jemand theilt an 36 Arme eben so viele Achtel-Gulden aus, wie viele Gulden kamen zur Vertheilung?
7) Ein Krämer wiegt zum Verkauf in seinen Laden ab 45 Halbe-Pfund Rosinen, 58 Viertel-Pfund Zucker, 43 Achtel-Pfund Kaffee und 67 Sechzehntel-Pfund Tabak; wie viele Pfund von jeder Sorte bestimmte er hiefür?
8) In einem Hause braucht man täglich eine Zwölftel-Klafter Holz zur Beheizung; wie viele Klafter werden während der 4 Wintermonate à 30 Tage gebraucht?
9) Jemand braucht täglich ein Zehntel-Pfund Zucker; wie viele Pfund macht dieses während eines Jahres zu 365 Tagen? und wie viele Gulden kostet dieser Zucker des Jahres, wenn das Zehntel-Pfund einen Zwanzigstel-Gulden gilt?
10) In einer Branntweinschenke wurden zu einer Marktzeit 280 Gläschen Liqueur ausgeschenkt; wie viele Maß, wenn jedes Gläschen ein Zwölftel-Maß hielt? und wie viele Gulden sind eingenommen worden, wenn man für das Glas einen Fünfzehntel-Gulden bezahlte?
11) Ein Oekonom braucht zur Fütterung seines Viehes jedes Mal $^{1}/_{6}$ Schfl. Kartoffeln; wie viele Schäffel macht dieses in $^{4}/_{5}$ Jahren oder in 292 Tagen?
12) Ein Papierhändler verkauft nach und nach 9 Rieß Papier, das Buch zu 1 Fünftel-Gulden; was hat er eingenommen? und wie groß ist sein Gewinn, wenn er an jedem Buch 1 Vierundzwanzigstel-Gulden gewinnt?
13) Zur Unterstützung der Armen mußten die Bürger einer Stadt vierteljährig die Armensteuer zahlen. Wie viel Geld kam alle Vierteljahr in die Armenkasse, wenn die Gemeinde 580 Bürger zählte, von denen die eine Hälfte jeder 1 Drittel-, und jeder der anderen Hälfte 1 Fünftel-Gulden vierteljährlich zu zahlen hatte? Um wie viele Gulden hat die eine Hälfte der Bürgerschaft mehr, als die andere entrichtet?
14) Ein Weinbergbesitzer verkauft 8 Eimer 40 Maß Wein an einen Weinhändler, der den Wein wieder an einen Wirth absetzt. Wenn nun der Weinhändler an der Maß 1 Achtel-Gulden und der Wirth einen Neuntel-Gulden Gewinn nimmt, wie viel gewinnt jeder?

15) Ein Kaufmann setzt um 750 fl. Waaren ab; wie viel Gewinn hat er daran, wenn er durchschnittlich am Gulden einen Fünftel-Gulden rein gewinnt? und wie hoch ist ihm selbst die Waare zu stehen gekommen?

(Es braucht wol nicht erst erwähnt zu werden, daß manche dieser Aufgaben, wenn sie für das Kopf- oder Mündlich-Rechnen gegeben werden, zu trennen sind).

6. Vergleichen der Brüche mit der Einheit und untereinander in Hinsicht ihres Werthes.

Oben (S. 11 ff.) ist gezeigt worden, daß jeder eigentliche oder ächte Bruch stets weniger als ein Ganzes, jeder uneigentliche Bruch gerade ein oder mehre Ganze, und jeder unächte Bruch stets mehr als ein Ganzes, als eine Einheit bezeichne. Es ist daher der Werth jedes ächten Bruches kleiner, als der der Einheit; der Werth eines uneigentlichen Bruches ist entweder dem der Einheit gleich, oder um gerade ein Vielfaches der Einheit größer, und der Werth unächter Brüche ist stets größer als die Einheit: z. B. $^3/_5$, $^6/_6$, $^{11}/_8$. $1 = {}^5/_5$; $^3/_5$ ist um $^2/_5$ weniger als 1; folglich ist der Werth des Bruches $^3/_5$ auch um $^2/_5$ kleiner als 1. $1 = {}^6/_6$. $^6/_6$ ist eben so groß als $^6/_6$ oder als 1; daher der Werth des Bruches $^6/_6 = 1$. $1 = {}^8/_8$. $^{11}/_8$ ist $= {}^8/_8 + {}^3/_8$, folglich um $^3/_8$ größer als $^8/_8$, und somit ist der Werth des Bruches $^{11}/_8$ um $^3/_8$ größer als 1. Um nun zu bestimmen, um wie viele Theile ein Bruch kleiner oder größer ist, als die Einheit, löse man diese in dieselben Theile des gegebenen Bruches auf und ziehe die kleinere Anzahl der Theile (den kleineren Zähler) von der größeren Anzahl (von dem größeren Zähler) ab; der so gefundene Unterschied bestimmt, um wie viele Theile der Bruch kleiner oder größer ist, als die Einheit. Z. B. $^3/_4 < 1$; $1 = {}^4/_4$. $^4/_4 - {}^3/_4 = {}^1/_4$, d. i. $^3/_4$ ist um $^1/_4$ kleiner als 1. $^7/_5 > 1$; $1 = {}^5/_5$. $^7/_5 - {}^5/_5 = {}^2/_5$, d. i. $^7/_5$ ist um $^2/_5$ größer als 1 u. s. w. Auf kürzerem Wege können diese Unterschiede zwischen einem Bruche und der Einheit gefunden werden, wenn man, bei Vergleichung eines ächten Bruches mit der Einheit, den Zähler von dem Nenner abzieht und dem Reste denselben Nenner des Bruches gibt. Dieser neue Bruch ist sodann der Unterschied des gegebenen Bruches und der Einheit oder dieser Rest gibt an, um wie viele Theile der Bruch kleiner ist, als die Einheit. Z. B. $^5/_8$! $8 - 5 = 3$; d. i. $^5/_8$ ist um $^3/_8$ weniger als 1. Es ist dieses leicht begreiflich. Die Einheit hat 8 solche Theile, wie der Bruch selbst nur 5 hat, was ja eben der Nenner sagt, nämlich, daß die Einheit oder das Ganze in 8 gleiche Theile getheilt sei. 5 ist aber um 3 weniger als 8, welche jedoch nicht Ganze, sondern Achtel sind.

Ist es ein unächter Bruch, so zieht man den Nenner vom Zähler ab und gibt dem erhaltenen Reste ebenfalls den Nenner des gegebenen Bruches zum Nenner. Dieser neue Bruch ist sodann der Ueberschuß, um welchen der unächte Bruch größer ist, als die Einheit. Z. B. um wie viel ist $^{10}/_7$ größer als 1? $10 - 7 = 3$; d. i. $^{10}/_7$ ist um $^3/_7$ größer als 1. Der Grund läßt sich leicht aus dem Vorhergesagten ableiten.

Daraus folgt: Jeder Bruch, dessen Zähler kleiner als der Nenner, hat einen kleinern, und jeder Bruch, dessen Zähler größer als der Nenner ist, hat einen größern Werth als 1. Also:

$^1/_5 < 1$, $^3/_7 < 1$, $^5/_9 < 1$, $^{14}/_{15} < 1$, $^{17}/_{25} < 1$ u. s. w.
$^6/_5 > 1$, $^9/_7 > 1$, $^{13}/_8 > 1$, $^{19}/_{12} > 1$, $^{37}/_{20} > 1$ u. s. w.

Es versteht sich übrigens von selbst, daß bei angewandten Brüchen der zu vergleichende Bruch und die Einheit gleichnamig sein müssen, welche Bemerkung auch für das Folgende gilt.

Vergleichen wir zuvor die Brüche: $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_{10}$, $^1/_{12}$, $^1/_{15}$, $^1/_{20}$, $^1/_{30}$ in angewandten Beispielen!

$^1/_2$ Gulden = 30 kr.; $^1/_3$ fl. = 20 kr.; $^1/_4$ fl. = 15 kr.; $^1/_5$ fl. = 12 kr.; $^1/_6$ fl. = 10 kr.; $^1/_{10}$ fl. = 6 kr.; $^1/_{12}$ fl. = 5 kr.; $^1/_{15}$ fl. = 4 kr.; $^1/_{20}$ fl. = 3 kr.; $^1/_{30}$ fl. = 2 kr.

Die Nenner dieser Brüche zeigen an, daß die Einheit (1 ganzer Gulden) zuerst in 2, dann in 3, in 4, in 5, in 6 u. s. w. gleiche Theile getheilt worden ist. Auch der bei der Anwendung in der untergeordneten Größe angegebene Werth jedes einzelnen Bruches beweiset den allgemeinen Satz:

In je mehre gleiche Theile ein und dieselbe Einheit getheilt wird, um so kleiner, oder von desto geringerem Werthe wird jeder einzelne Theil. $^1/_2$ ist also größer, als $^1/_3$; $^1/_3$ größer als $^1/_4$, aber kleiner als $^1/_2$; $^1/_4$ größer als $^1/_5$, aber kleiner als $^1/_3$, als $^1/_2$; $^1/_5$ ist größer als $^1/_6$, aber kleiner als $^1/_4$, $^1/_3$, $^1/_2$ u s. w.

Von den Brüchen $^3/_4$, $^3/_5$, $^3/_6$ hat jeder dieselbe Anzahl von Theilen, ihre Zähler sind einander gleich, aber die Theile selbst, ihre Nenner sind verschieden. In dem Bruche $^3/_4$ sind die Theile größer, als in $^3/_5$ und in $^3/_6$; in $^3/_5$ sind die Theile kleiner als in $^3/_4$, aber größer als in $^3/_6$; in $^3/_6$ sind die Theile kleiner als in $^3/_5$, und noch kleiner als in $^3/_4$, folglich verhält sich auch ebenso ihr Werth. Zu dem Bruch $^3/_4$ ist das Ganze in vier, zu $^3/_5$ in fünf und zu $^3/_6$ in sechs gleiche Theile getheilt. Im ersten Falle sind aus der Einheit die wenigsten, im letzten die meisten Theile gemacht worden; daher sind auch die Theile im ersten Falle größer als im zweiten und dritten, und eben deßwegen ist auch der Werth jedes einzelnen Theiles des Bruches $^3/_4$ größer, als in $^3/_5$ und in $^3/_6$. Bei $^3/_6$ ist die Einheit in die meisten Theile zerlegt, folglich sind auch diese Theile, und somit ihr Werth ebenfalls, kleiner als bei $^3/_5$ und bei $^3/_4$. Da nun die Zähler aller dieser Brüche gleich groß sind, der Werth der einzelnen Theile aber bei $^3/_4$ größer als bei $^3/_5$ und $^3/_6$, und bei $^3/_5$ größer als bei $^3/_6$; so ist der Werth des ganzen Bruches $^3/_4$ größer, als bei $^3/_5$ und bei $^3/_6$, und der des Bruches $^3/_5$ größer, als bei $^3/_6$. So auch:

$^1/_3 > ^1/_4 > ^1/_5 > ^1/_6 > ^1/_7$ ꝛc. — $^1/_7 < ^1/_6 < ^1/_5 < ^1/_4 < ^1/_3$ ꝛc.
$^3/_4 > ^3/_5 > ^3/_6 > ^3/_7 > ^3/_8$ ꝛc. — $^3/_8 < ^3/_7 < ^3/_6 < ^3/_5 < ^3/_4$ ꝛc.
$^5/_8 > ^5/_9 > ^5/_{10} > ^5/_{12} > ^5/_{11}$ ꝛc. — $^5/_{12} < ^5/_{11} < ^5/_{10} < ^5/_9 < ^5/_8$ ꝛc.

Aus dieser Darstellung ist einleuchtend, daß unter mehren Brüchen mit gleichen Zählern derjenige Bruch den größern Werth hat, welcher einen kleinern Nenner hat. Daraus folgt dann nothwendig, daß bei gleichbleibendem Zähler der Werth der Bruches sich verkleinert, wenn der Nenner vergrößert, und sich vergrößert, wenn der Nenner verkleinert wird; oder: bei gleichbleibendem Zähler vermindert sich der Werth des Bruches mit dem Wachsthum des Nenners, und mit der Abnahme des Nenners vermehrt sich der Werth des

Bruches. Bei gleichbleibenden Zählern ist daher Verkleinerung des Bruchwerthes mit der Vergrößerung des Nenners, und mit dessen Verkleinerung die Vergrößerung des Werthes eines Bruches verbunden. Hieraus ergibt sich der Schluß:

Je größer der Nenner eines Bruches bei gleichen Zählern, desto kleiner sind dessen Theile, desto kleiner der Werth dieser Theile und somit der Werth des Bruches selbst, und umgekehrt.

Die Brüche $^1/_5$, $^2/_5$, $^3/_5$, $^4/_5$ ꝛc. haben alle einen gleichen Nenner, aber verschiedene Zähler, d. h. in jedem dieser Fälle ist die Einheit in 5 gleiche Theile getheilt, wovon 1, 2, 3, 4 Theile genommen sind. Da in diesem Falle die Theile jedes Bruches ganz gleich groß sind, so sind 2 Theile mehr als 1 Theil, 3 mehr als zwei, und 4 mehr als drei Theile; der Werth eines dieser Brüche ist daher um so größer, je größer der Zähler derselben ist oder je mehr Theile genommen sind. Dieses ist leicht nachzuweisen. $^1/_5$ fl. $=$ 12 kr., $^1/_5 + ^1/_5$ fl. $= ^2/_5$ fl., also 2×12 kr. $=$ 24 kr.; $^1/_5$ fl. $+ ^1/_5$ fl. $+ ^1/_5$ fl. $= ^3/_5$ fl., also 3×12 kr. $=$ 36 kr. u. s. w.

Es ist also auch:

$^1/_6 < ^2/_6 < ^3/_6 < ^4/_6 < ^5/_6$ ꝛc. — $^5/_6 > ^4/_6 > ^3/_6 > ^2/_6 > ^1/_6$ ꝛc.
$^3/_7 < ^4/_7 < ^5/_7 < ^6/_7 < ^7/_7$ ꝛc. — $^7/_7 > ^6/_7 > ^5/_7 > ^4/_7 > ^3/_7$ ꝛc.
$^8/_{15} < ^9/_{15} < ^{10}/_{15} < ^{11}/_{15} < ^{12}/_{15}$ ꝛc. — $^{12}/_{15} > ^{11}/_{15} > ^{10}/_{15} > ^9/_{15} > ^8/_{15}$ ꝛc.

Im Allgemeinen sehen wir hieraus schon, daß unter mehren Brüchen mit gleichen Nennern derjenige Bruch einen größern Werth hat, der einen größern Zähler hat. Daraus folgt nun wieder, daß bei gleichbleibendem Nenner der Werth des Bruches sich vergrößert, wenn der Zähler vergrößert wird, und sich verkleinert, wenn der Zähler verkleinert wird; oder: bei gleichbleibendem Nenner vergrößert sich der Werth des Bruches mit dem Wachsthum des Zählers, und mit der Abnahme des Zählers vermindert sich der Werth des Bruches. Bei gleichbleibendem Nenner ist daher die Vergrößerung des Bruchwerthes mit der Vergrößerung des Zählers verbunden, und umgekehrt.

Man schließt daher: Je größer der Zähler bei gleichbleibendem Nenner, desto größer der Werth des Bruches, und je kleiner der Zähler, desto kleiner der Werth des Bruches.

Wird allein der Nenner des Bruches $^3/_5$ um eine Einheit vergrößert, so vermindert sich der Werth des Bruches, und wird der Zähler allein vergrößert, so vergrößert sich der Werth des Bruches; denn $^3/_5 > ^3/_6$, und $^3/_5 < ^4/_5$. Wird aber der Nenner um eine Einheit vermindert, so vergrößert sich der Werth, und wird der Zähler um eine Einheit vermindert, so verringert sich des Bruches Werth; denn $^3/_5 < ^3/_4$, $^3/_5 > ^2/_5$. Ebenso ist es, wenn sich der Nenner oder Zähler um mehre Einheiten vergrößert oder verkleinert.

$^3/_8 > ^3/_{10} > ^3/_{12} > ^3/_{14}$ ꝛc. — $^3/_{14} < ^3/_{12} < ^3/_{10} < ^3/_8$ ꝛc.
$^2/_5 > ^2/_8 > ^2/_{12} > ^2/_{20}$ ꝛc. — $^2/_{20} < ^2/_{12} < ^2/_8 < ^2/_5$ ꝛc.
$^3/_8 < ^5/_8 < ^7/_8 < ^9/_8$ ꝛc. — $^9/_8 > ^7/_8 > ^5/_8 > ^3/_8$ ꝛc.
$^2/_{15} < ^5/_{15} < ^8/_{15} < ^{11}/_{15}$ ꝛc. — $^{11}/_{15} > ^8/_{15} > ^5/_{15} > ^2/_{15}$ ꝛc.

Daraus könnte man nun leicht schließen, daß der Werth eines Bruches nicht verändert wird, wenn der Nenner **und** der Zähler um eine, oder um gleichviele Einheiten zu- oder abnimmt; aber ein solcher Schluß wäre ganz falsch. Werden Nenner **und** Zähler des Bruches $^3/_5$ um eine Einheit vergrößert, so heißt derselbe jetzt $^4/_6$; um eine Einheit vermindert heißt er $^2/_4$; um drei Einheiten vergrößert, heißt er $^6/_8$, und um zwei Einheiten vermindert, heiß er $^1/_3$. $^3/_5$ ist aber weder $^4/_6$, noch $^2/_4$; weder $^6/_8$, noch $^1/_3$. Nur bei uneigentlichen Brüchen, die gerade ein Ganzes betragen, ist der Werth des Bruches derselbe, es mag der Nenner und der Zähler um eine oder mehre Einheiten wachsen oder abnehmen. Z. B. $^4/_4 = {^5/_5} = {^7/_7} = {^{10}/_{10}}$ u. s. w. Klarer wird dieses noch, wenn wir das Gesagte auf ein angewandtes Beispiel übertragen. $^3/_5$ fl. = 36 kr.; $^4/_6$ fl. = 40 kr.; $^2/_4$ fl. = 30 kr.; $^6/_8$ fl. = 45 kr.; $^1/_3$ fl. = 20 kr. Also keiner der durch Vergrößerung oder Verkleinerung des Nenners und des Zählers erhaltenen Brüche ist dem Bruche $^3/_5$ fl. = 36 kr. gleich. Wol aber sehen wir, daß, wenn Nenner und Zähler um gleichviel (gleichviele Einheiten — nicht um das Gleichvielfache) wachsen, der Werth des Bruches sich vergrößert, und dessen Werth sich verkleinert, wenn Nenner und Zähler um gleichviel abnehmen. Bei der Zu- oder Abnahme des Zählers bleiben die Theile selbst dieselben, also von gleichem Werthe; bei Zu- oder Abnahme des Nenners werden die Theile selbst, somit auch ihr Werth verändert.

Daraus ergibt sich nun der Schluß: Vergrößert oder vermindert sich der Nenner **und** Zähler, wenn auch um gleichviel Einheiten, so bleibt dennoch der Werth des Bruches **nicht** unverändert; der Werth des Bruches nimmt zu mit der Zunahme und nimmt ab mit der Abnahme des Zählers **und** Nenners.

Sind zwei oder mehre Brüche von verschiedenen Nennern und verschiedenen Zählern gegeben, so läßt sich ihr Verhältniß in Hinsicht ihres Werthes hier noch nicht bestimmen, ausgenommen es sind benannte Brüche, die dann in untergeordnete Größen aufgelös't werden müßen. Z. B. $^1/_3$, $^{11}/_{32}$! Welcher von diesen beiden Brüchen den größern Werth hat, ist hier so nicht anzugeben, sie müssen denn gleichnamig gemacht werden, was erst später folgt. Betrachtet man sie als gleichbenannte Zahlen, z B. als $^1/_3$ fl. und $^{11}/_{32}$ fl., so müssen sie aufgelös't werden. $^1/_3$ fl. = 20 kr.; $^1/_{32}$ fl. = $1^7/_8$ kr., $^{11}/_{32}$ fl. = $11 \times 1^7/_8$ kr. = $20^5/_8$ kr. Daher erst: $^1/_3 < {^{11}/_{32}}$.

Auch hier gehe der Lehrer wieder so zu Werke, daß die Schüler die aufgestellten Sätze gleichsam aus sich selbst auffinden, was nicht schwer ist, besonders wenn die Vergleichung anschaulich an gleichlangen, verschieden in gleiche Theile getheilten Strichen, die an die Schultafel gemacht werden, oder an sonstigen Versinnlichungsmitteln, vorgenommen wird; oder wenn der Lehrer die Uebungen auf angewandte Brüche überträgt. In diesem letztern Falle ist aber wol zu merken, daß die zu vergleichenden Zahlen, wie schon oben angedeutet, von gleicher Benennung sein müssen; denn sonst könnte man leicht zu einem falschen Schlusse kommen. Z. B. der Bruch $^1/_8$ fl. ist mehr als $^3/_4$ kr., obgleich bei $^1/_8$ fl. der Zähler kleiner, und auch der Nenner größer ist, als bei $^3/_4$ kr. — Um zur Ueberzeugung zu gelangen, ob die Schüler die Sache richtig verstanden und aufgefaßt haben, und noch zur tiefern Begründung dieses, schreibe der Lehrer viele Brüche an die Tafel, theils von gleichen Zählern, theils von gleichen

Nennern mit der Aufforderung, daß die Schüler die Unterschiede und die Werthsverhältnisse zu der Einheit und untereinander beurtheilen und angeben, und dieses Alles mit Gründen nach der vorgenommenen Entwickelung belegen. Auch halte der Lehrer die Schüler an, die einen oder andern Beispiele durch Versinnlichungsmittel, die die Schüler selbst aufsuchen müssen, anschaulich zu machen, was unter der rechten Leitung des Lehrers keine große Schwierigkeit haben wird.

7. Die möglichen Veränderungen, die an einem Bruche ohne und mit Beibehaltung seines Werthes vorgenommen werden können.

A. Zerfällen eines Bruches.

Aus dem frühern Rechnungsunterrichte ist bekannt, und S. 1 u. ff. wurde gezeigt, daß man jedes vielfache Ganze, so wie die Einheit in kleinere, gleiche oder ungleiche Theile zerlegen oder auflösen kann. Eben dasselbe kann auch mit zusammengesetzten Brüchen geschehen. Der Bruch $^{12}/_{15}$ kann in seine Bestandtheile zerfällt werden, nämlich in zwölfmal $^{1}/_{15}$; oder in größere gleiche Theile, als: $^{6}/_{15} + {}^{6}/_{15}$, oder $^{4}/_{15} + {}^{4}/_{15} + {}^{4}/_{15}$, oder $^{3}/_{15} + {}^{3}/_{15} + {}^{3}/_{15} + {}^{3}/_{15}$ u. s. w.; in ungleiche Theile: $^{7}/_{15} + {}^{5}/_{15}$, oder $^{3}/_{15} + {}^{4}/_{15} + {}^{5}/_{15}$, oder $^{2}/_{15} + {}^{3}/_{15} + {}^{4}/_{15} + {}^{3}/_{15}$ u. s. w. — Dasselbe kann auch geschehen mit unächten und uneigentlichen Brüchen, so wie mit gemischten Zahlen, jedoch müssen letztere vorerst in unächte Brüche verwandelt werden; z. B. $^{15}/_{8} = {}^{5}/_{8} + {}^{5}/_{8} + {}^{5}/_{8}$; $^{3}/_{8} + {}^{3}/_{8} + {}^{3}/_{8} + {}^{3}/_{8} + {}^{3}/_{8}$; oder $^{7}/_{8} + {}^{8}/_{8}$; $^{11}/_{8} + {}^{4}/_{8}$; $^{8}/_{8} + {}^{4}/_{8} + {}^{3}/_{8}$ 2c.; so auch: $^{10}/_{10} = {}^{5}/_{10} + {}^{5}/_{10}$; $^{2}/_{10} + {}^{2}/_{10} + {}^{2}/_{10} + {}^{2}/_{10} + {}^{2}/_{10}$; oder $^{7}/_{10} + {}^{3}/_{10}$; $^{4}/_{10} + {}^{6}/_{10}$; $^{3}/_{10} + {}^{5}/_{10} + {}^{2}/_{10}$ 2c.; ferner $3^{3}/_{5} = {}^{18}/_{5}$, $^{18}/_{5} = {}^{9}/_{5} + {}^{9}/_{5}$; $^{6}/_{5} + {}^{6}/_{5} + {}^{6}/_{5}$ 2c.; oder $^{15}/_{5} + {}^{3}/_{5}$; $^{10}/_{5} + {}^{8}/_{5}$; $^{10}/_{5} + {}^{5}/_{5} + {}^{3}/_{5}$; $^{6}/_{5} + {}^{5}/_{5} + {}^{4}/_{5} + {}^{3}/_{5}$ u. s. w.

Bei dem Zerfällen eines Bruches bleibt der Nenner unverändert, der Zähler, und somit die Werthe der einzelnen Brüche werden kleiner; die Werthe sämmtlicher, aus der Zerfällung erhaltener Brüche müssen dem Werthe des zerfällten Bruches gleich sein.

Diese Uebung im Zerfällen der Brüche, scheinbar von geringer Bedeutung, möge ja nicht so leichthin übergangen werden, denn sie wird nicht nur bei dem Zusammenzählen und Abziehen wesentliche Dienste leisten, sondern kann auch späterhin namentlich das Schnell-Rechnen im Kopfe sehr erleichtern und fördern. Nur an ein paar Beispielen möge solches gezeigt werden. Z. B. $^{25}/_{32}$ fl. sollen in Kreuzer aufgelös't werden. Man lasse diesen Bruch zerfällen: $^{16}/_{32} + {}^{8}/_{32} + {}^{1}/_{32}$. $^{16}/_{32}$ fl. $= {}^{1}/_{2}$ fl. $= 30$ kr. $^{8}/_{32}$ fl. $= {}^{1}/_{4}$ fl. $= 15$ kr.; $^{1}/_{32}$ fl. $= 1^{7}/_{8}$ kr.; also $^{25}/_{32}$ fl. $= 30$ kr. $+ 15 + 1^{7}/_{8} = 46^{7}/_{8}$ kr. — Eben so: $^{38}/_{45}$ fl. $= {}^{36}/_{45} + {}^{2}/_{45}$; $^{36}/_{45}$ fl. $= {}^{4}/_{5}$ fl. $= 48$ kr.; $^{1}/_{45}$ fl. $= {}^{60}/_{45}$ kr. $= 1^{15}/_{45}$ kr. $= 1^{1}/_{3}$ kr.; $^{2}/_{45}$ fl. $= 2 \times 1^{1}/_{3}$ kr. $= 2^{2}/_{3}$ kr.; $48 + 2^{2}/_{3}$ kr. $= 50^{2}/_{3}$ kr. Oder: $^{38}/_{45} = {}^{15}/_{45} + {}^{15}/_{45} + {}^{8}/_{45}$; $^{15}/_{45}$ fl. $= {}^{1}/_{3}$ fl. $= 20$ kr.; $^{1}/_{45}$ fl. $= {}^{60}/_{45}$ kr. $= 1^{1}/_{3}$ kr.; $^{8}/_{45}$ fl. $= 8 \times 1^{1}/_{3}$ kr. $= 10^{2}/_{3}$ kr.; $^{15}/_{45} + {}^{15}/_{45} + {}^{8}/_{45}$ fl. $= 20 + 20 + 10^{2}/_{3}$ kr. $= 50^{2}/_{3}$ kr.

Ueberdies ist diese Uebung ganz geeignet, die Schüler zum selbstthätigen Nachdenken anzuhalten, ihren Eifer zu beleben und ihren Scharfsinn zu wecken. Als Aufgaben in diesem Sinne dienen etwa ähnliche, wie folgende:

1) Wie oft Mal kann $^{12}/_{16}$ in gleiche Theile zerfällt werden? gebt an, wie viele solche zerfällte Brüche man jedes Mal erhält und wie diese jetzt heißen!

Antw. 5 mal; nämlich zwei Brüche zu $^{6}/_{16} + {}^{6}/_{16}$; drei zu $^{4}/_{16} + {}^{4}/_{16} + {}^{4}/_{16}$; vier zu $^{3}/_{16} + {}^{3}/_{16} + {}^{3}/_{16} + {}^{3}/_{16}$; sechs zu $^{2}/_{16} + {}^{2}/_{16} + {}^{2}/_{16} + {}^{2}/_{16} + {}^{2}/_{16} + {}^{2}/_{16}$, und zwölf zu je $^{1}/_{16}$.

2) Zerfällt $^{18}/_{19}$ zuerst in 2, dann in drei gleiche Theile und gebt an, um wie viele Theile ein Bruch nach der ersten Zerfällung größer ist, als nach der zweiten, und umgekehrt!

Antw. $^{18}/_{19} = {}^{9}/_{19} + {}^{9}/_{19}$; $^{18}/_{19} = {}^{6}/_{19} + {}^{6}/_{19} + {}^{6}/_{19}$. $^{9}/_{19}$ ist um $^{3}/_{19}$ größer als $^{6}/_{19}$, und $^{6}/_{19}$ ist um $^{3}/_{19}$ kleiner als $^{9}/_{19}$.

3) Zerfällt $^{10}/_{12}$ in zwei ungleiche Theile und sagt, um wie viel der eine Theil mehr oder weniger ist, als der andere!

Antw. $^{10}/_{12} = {}^{3}/_{12} + {}^{7}/_{12}$, oder $^{6}/_{12} + {}^{4}/_{12}$ 2c.; $^{3}/_{12}$ ist um $^{4}/_{12}$ weniger als $^{7}/_{12}$; $^{6}/_{12}$ ist um $^{2}/_{12}$ mehr als $^{4}/_{12}$ 2c.

4) Zerlegt $^{10}/_{12}$ so in zwei ungleiche Theile, daß der eine Theil nur um ein Zwölftel größer ist, als der andere!

Antw. Das geht nicht an.

5) Zerfällt $^{9}/_{12}$ auf dieselbe Weise!

Antw. $^{5}/_{12} + {}^{4}/_{12}$; $^{5}/_{12}$ ist um $^{1}/_{12}$ größer, als $^{4}/_{12}$.

6) Zerlegt $^{10}/_{12}$ so in zwei ungleiche Theile, daß der eine Bruch um 2 Theile größer ist, als der andere!

Antw. $^{6}/_{10} + {}^{4}/_{10}$.

7) Zerfället $^{9}/_{12}$ so in drei ungleiche Theile, daß der erste Bruch um einen Theil größer, als der zweite, und der dritte um einen Theil kleiner ist, als der zweite!

Antw. $^{4}/_{12} + {}^{3}/_{12} + {}^{2}/_{12}$.

8) Zerfälle $^{10}/_{12}$ so in zwei ungleiche Theile, daß, wenn man zu dem kleinern Bruche einen Theil von dem größern hinzunimmt, beide Brüche gleich groß sind!

Antw. $^{6}/_{10} + {}^{4}/_{10}$.

9) Ernst und Traugott haben aus ihrer Sparkasse $^{13}/_{15}$ fl. genommen; Ernst hat aber $^{3}/_{15}$ fl. mehr herausgenommen, als Traugott; wie viel hat jeder aus der Sparkasse genommen?

Antw. E. $^{8}/_{15}$ fl. T. $^{5}/_{15}$ fl.

10) Emma und Ida erhielten mit einander $^{8}/_{10}$ fl. Würde Emma $^{2}/_{10}$ fl. weniger erhalten haben, so hätten sie gleich viel Geld; wie viel Geld hat jede?

Antw. E. $^{5}/_{10}$ fl., J. $^{3}/_{10}$ fl.

11) Wilhelm und Eduard haben $^{14}/_{16}$ ℔ Tabak. Gibt Wilhelm drei Theile von seinem dem Eduard, so haben beide gleichviel; wie viel Tabak hat jeder?

Antw. W. $^{10}/_{16}$ ℔, E. $^{4}/_{16}$ ℔.

12) Anna und Frida verspinnen täglich $^{11}/_{12}$ ℔ Flachs. Würde Frida 2 Theile mehr verspinnen, so würde sie doch noch um einen Theil weniger fertigen, als Anna; wie viel Pfund Flachs verspinnt jede täglich?

Antw. A. $^{7}/_{12}$ ℔, F. $^{4}/_{12}$ ℔.

B. Veränderung eines Bruches durch Vervielfachung des Zählers mit einer ganzen Zahl.

(Eigentliche Multiplikation.)

Vervielfachung bewirkt bekanntlich Vergrößerung, und zwar so oftmalige Vergrößerung, als die Zahl, mit der vervielfacht wird (Multiplikator), selbst Einheiten hat. Wird nun der Zähler des Bruches $^{8}/_{12}$ allein mit der Zahl 2, oder 3, 4, 5 u. s. w., vervielfacht, so entstehen Brüche, die einen 2, 3, 4, 5 2c. mal so großen Zähler haben. Je größer aber der Zähler bei gleichem Nenner, desto größer auch der Werth des Bruches. $^{8}/_{12}$ zweimal genommen gibt $^{16}/_{12}$ ($^{8}/_{12} \times 2 = {}^{16}/_{12}$); es ist also der Zähler bei unverändertem Nenner 2mal so groß, und deßwegen ist auch der Werth dieses neuen Bruches 2mal so groß. Eben so ist 3mal $^{8}/_{12} = {}^{24}/_{12}$, dreimal so groß, 4mal $^{8}/_{12} = {}^{32}/_{12}$ viermal so groß der Zähler und somit auch die Werthe dieser Brüche u. s. w. Es ist dieses leicht nachzuweisen. $^{8}/_{12}$ fl. = 40 kr.; $^{16}/_{12}$ fl. = 80 kr.; $^{24}/_{12}$ fl. = 120 kr.; $^{32}/_{12}$ fl. = 160 kr. 2c. 80 kr. sind 2mal, 120 kr. 3mal, 160 kr. 4mal so viel, als 40 kr. Daraus ergibt sich:

Wird der Zähler eines Bruches allein mit einer ganzen Zahl multiplizirt, so vergrößert sich derselbe um das Sovielfache, als die Zahl, mit der multiplizirt wird (der

Multiplikator), Einheiten hat, und in demselben Verhältnisse wächst auch bei unverändertem Nenner der Werth des Bruches; der Nenner des Bruches bleibt unverändert, folglich auch der Werth der einzelnen Theile. Das Verfahren selbst ist eigentliche **Multiplikation.**

Hier kann man schon das Multiplizieren der Brüche mit ganzen Zahlen vornehmen und üben. Die durch Multiplikation entstehenden uneigentlichen und unächten Brüche werden in Ganze oder in eine gemischte Zahl verwandelt. Aufgaben dieser Art sind leicht zu bilden und es dürften daher folgende Beispiele als Andeutung für den Stufengang genügen.

1) Wasfür Brüche entstehen, wenn der Zähler des Bruches $^3/_{16}$ — 2, 3, 4, 5mal genommen wird?

2) Wasfür Brüche entstehen aus $^7/_{60}$ durch Vervielfachung seines Zählers mit 3, 4, 5, 6, 7, 8?

3) Welcher Bruch ist das 5fache von $^5/_{35}$, das 7fache von $^9/_{14}$, das 9fache von $^8/_{45}$, das 13fache von $^5/_{20}$?

4) Welcher Bruch entsteht, wenn man $^{24}/_{36}$, ohne den Nenner zu verändern, a) mit 2, b) mit 4, c) mit 6, d) mit 9, e) mit 12 und f) mit 18 multiplizirt?

5) Ein Schulfreund vertheilte unter die fleißigsten 9 Knaben und 10 Mädchen Geld. Jeder Knabe erhielt $^2/_3$ fl. und jedes Mädchen $^3/_5$ fl.; wie viel Geld erhielten die 9 Knaben? und wie viel die 10 Mädchen?

6) Ein Bauer hat jährlich $^7/_8$ Schfl. Kern, $^8/_9$ Schfl. Roggen, $^7/_{12}$ Schfl. Gerste und $^{13}/_{15}$ Schfl. Haber Gilt zu schütten; wie viele Schfl. von jeder Sorte wird er in 3 Jahren, b) in 5 Jahren, c) in 9 Jahren, d) in 20 Jahren entrichtet haben?

C. Veränderung eines Bruches durch Division des Zählers mit einer ganzen Zahl.

(Eigentliche Division — Theilen oder Enthaltensein.)

Division oder Theilen bewirkt Verkleinerung, und zwar so oftmalige Verkleinerung, als die Zahl, mit welcher dividirt wird (der Divisor), Einheiten hat. Wird der Zähler des Bruches $^8/_{12}$ durch 2, 4 oder 8 dividirt, so entstehen Brüche, deren Zähler 2, 4 oder 8mal so klein sind (besser: deren Zähler nur der 2te, 4te, 8te Theil ist), als der des ursprünglichen Bruches. Theilt man den Zähler des Bruches $^8/_{12}$ durch die Zahl 2 (^{2}: $^8/_{12} = {^4/_{12}}$), so erhält man $^4/_{12}$; also einen 2mal so kleinen, oder nur $^1/_2$mal so großen Bruch; durch 4 getheilt (^{4}: $^8/_{12} = {^2/_{12}}$), gibt $^2/_{12}$, d. i. einen 4mal so kleinen oder nur $^1/_4$mal so großen; durch 8 getheilt (^{8}: $^8/_{12} = {^1/_{12}}$), gibt $^1/_{12}$, d. i. einen 8mal so kleinen oder $^1/_8$ mal so großen Bruch. Und da der Werth eines Bruches mit der Abnahme seines Zählers bei gleichbleibendem Nenner sich in gleichem Verhältnisse vermindert: so hat der Bruch $^4/_{12}$ einen 2mal, $^2/_{12}$ einen 4mal und $^1/_{12}$ einen 8mal so kleinen Werth oder nur den 2ten (halben), 4ten, 8ten Theil des ursprünglichen Werthes des Bruches $^8/_{12}$. Der Beweis ergibt sich wie oben. $^8/_{12}$ fl. = 40 kr., $^4/_{12}$ fl. = 20 kr., $^2/_{12}$ fl. = 10 kr., und $^1/_{12}$ fl. = 5 kr. — 20 kr. ist 2mal, 10 kr. ist 4mal und 5 kr. ist 8mal so klein, als 40 kr.; oder: 20 kr. sind nur der 2te (halbe), 10 kr. der 4te und 5 kr. nur der 8te Theil von 40 kr.

Daraus folgt: Wird der Zähler eines Bruches allein durch eine ganze Zahl dividirt, so verkleinert sich derselbe (der Zähler) um das Sovielmalige oder um den sovielten Theil, als die Zahl, mit der dividirt wird (der Divisor), Einhei-

ten hat, und in eben demselben Verhältnisse vermindert sich auch der Werth des Bruches; sein Nenner (der Namen der Theile) bleibt unverändert und folglich auch der Werth der einzelnen Theile. Das Verfahren selbst ist eigentliche **Division** — Theilen oder Enthaltensein.

Was für diesen Fall die Aufgaben betrifft, so ist man auf dieser Stufe hierin beschränkt; denn als Beispiele dürfen nur solche Brüche gewählt werden, deren Zähler durch eine ganze Zahl ohne Rest theilbar sind. Folgende Beispiele mögen als Anhaltspunkte zur Bildung vermehrter Aufgaben dienen:

1) Wasfür ein Bruch entsteht, wenn man den Zähler des Bruches $^{12}/_{20}$ durch die Zahl a) 2, b) 3, c) 4 und d) 6 dividirt und den Nenner unverändert läßt?

2) Welche Brüche entstehen, wenn man $^{24}/_{25}$, ohne den Nenner zu verändern, a) 6 mal, b) 4mal, c) 8mal, d) 3mal, e) 2mal und f) 12mal kleiner macht? Warum?

3) Welcher Bruch ist a) 6mal, b) 5mal, c) 10mal, d) 4mal, e) 20mal, f) 12mal und g) 15mal so klein, als $^{60}/_{73}$?

4) Welches ist a) der 3te, b) der 7te, c) der 9te, d) der 21te Theil des Bruches $^{63}/_{72}$? Warum?

5) 5 Knaben bekommen zusammen $^{25}/_{32}$ fl. und 7 Mädchen $^{56}/_{60}$ fl.; wie groß ist der Antheil eines jeden Knaben und eines jeden Mädchens?

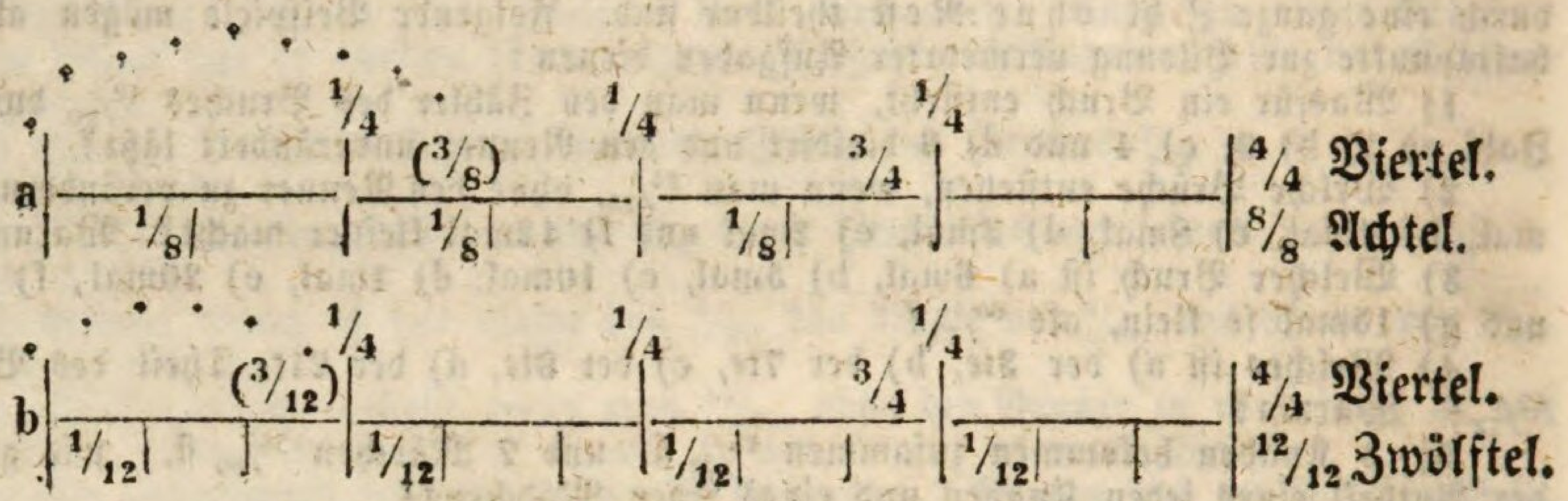
6) In einem Gasthause verbrauchte man in 9 Wochen $^{63}/_{100}$ Ztr. Kaffee und $^{81}/_{85}$ Ztr. Zucker; wie viel durchschnittlich in jeder Woche a) Kaffee, b) Zucker?

D. Veränderung eines Bruches durch Vervielfachung des Nenners mit einer ganzen Zahl.
(Division — Theilen durch Multiplikation.)

Streng genommen kann der Nenner eines Bruches nicht vervielfacht werden, oder: eine solche Vervielfachung hat an und für sich gar keinen Zweck; denn die Nenner sind nichts Anderes, als die Namen (Benennungen) der Bruchtheile. Wasfür einen Sinn kann auch die Vervielfachung eines Namens haben? Z. B. 3 mal Sechstel ist eben nur 3 mal Sechstel, also die Benennung „Sechstel" dreimal angewendet. Insofern ist also der Ausdruck „Vervielfachung oder Multiplikation des Nenners" ganz unrichtig und ungeeignet. — Wir wissen aber aus dem früheren Unterrichte (S. 9), daß der Nenner in doppelter Bedeutung betrachtet werden muß, nämlich als Nenner (wie oben) und als Zahl, in welch' letzterer Beziehung er uns erkennen läßt, in wie viele gleiche Theile ein Ganzes getheilt worden ist. Soll daher ein Bruch durch „Multiplikation des Nenners" verändert werden, so darf dieser Nenner nur in der Bedeutung als Zahl aufgefaßt werden, und man sollte daher auch nicht sagen, daß der Nenner, sondern daß die Zahl, in welche das Ganze getheilt ist und von welcher die Theile den Namen (Nenner) erhalten haben, vervielfacht werde. Indessen ist die erstere Sprechform schon altherkömmlich, kürzer und allgemein üblich, muß aber durchaus in vorstehendem Sinne aufgefaßt werden, wenn anders ein solches Multipliziren einen Sinn haben soll. Wir gehen nun zum Verfahren selbst über.

Wird der Nenner des Bruches $^3/_4$ mit der Zahl 2 multiplizirt (2 mal genommen) und bleibt der Zähler unverändert, so erhält man den neuen Bruch $^3/_8$, denn $2 \times {}^3/_4 = {}^3/_8$; d. h. das Ganze, welches ursprünglich in 4 gleiche Theile getheilt war, wird nun in $2 \times 4 = 8$ Theile getheilt, und da die Theile ihren Namen von der Anzahl des in

gleiche Theile getheilten Ganzen erhalten, so sind dadurch aus **Viertel** nunmehr **Achtel geworden**, welche zweimal so klein oder nur halb so groß sind, als Viertel. Wird der Nenner mit 3 vervielfacht, so entsteht $^3/_{12}$, denn $3 \times {}^3/_4 = {}^3/_{12}$; aus **Viertel** werden **Zwölftel**, also dreimal so kleine oder nur ein Drittel so große Theile, u. s. w. Anschaulich läßt sich dieses darstellen:



Linie a und b sind durch die längern Theilstriche in 4 gleiche Theile (Viertel) getheilt. Jeder Theil (jedes Viertel) der Linie a ist ferner durch kürzere Theilstriche in **zwei**, und jeder Theil der Linie b in **drei** gleiche Theile getheilt, das Ganze also bei a in $4 \times 2 = 8$ (8 Achtel), bei b in 4mal $3 = 12$ Theile (12 Zwölftel) getheilt. Hier ist es augenfällig, daß jedes Viertel 2 Achtel oder 3 Zwölftel enthält, daß aber auch die Achtel 2mal, die Zwölftel 3mal so klein, oder das Achtel nur der 2te (halbe) und das Zwölftel nur der 3te Theil des Viertels ist, folglich auch der Werth des Bruches bei ungeändertem Zähler im ersten Falle 2mal so klein (der zweite oder halbe Theil), im zweiten Falle aber 3mal so klein (der 3te Theil) ist, als der Werth des ursprünglichen Bruches $^3/_4$, was durch die punktirten Bogen bei Linie a und b angedeutet und ersichtlich ist. Angewandte Beispiele beweisen dasselbe, als: 1 ℔ = 32 Loth; die Hälfte oder $^1/_2$ ℔ = 16 Loth, $^1/_4$ ℔ oder der 4te Theil von 32 Loth = 8 Loth, $^1/_8$ ℔ = 4 Loth. $^3/_4$ ℔ = 24 Loth; $^3/_8$ ℔ aber nur 12 Loth. Eben so sind $^3/_{12}$ ℔ nur der 3te Theil von 24 Loth, nämlich 8 Loth u. s. w. Daraus ergibt sich leicht der Schluß: Wird die Anzahl des in gleiche Theile getheilten Ganzen (der Nenner) 2, 3, 4, 5mal rc. genommen, also durch Multiplikation 2, 3, 4, 5mal so groß, als sie anfangs war, so wird jeder einzelne dieser Theile 2, 3, 4, 5mal so klein, oder jeder einzelne dieser Theile wird nur der 2te, 3te, 4te, 5te . . nte Theil des anfänglichen Theiles und seines Werthes; folglich wird dadurch auch der Werth des Bruches selbst bei ungeändertem Zähler 2, 3, 4, 5 . . . n mal so klein, oder es ist nur der 2te, 3te, 4te, 5te . . . nte Theil oder Werth des Anfangswerthes eines Bruches. Es ergeben sich dabei folgende Veränderungen:

Der Zähler bleibt unverändert; der Nenner wird so vielmal so groß, als der Multiplikator Einheiten enthält, und der Werth des Bruches verkleinert sich um ebenso vielmal oder um den so vielten Theil. Das Verfahren selbst ist eine **Division** — Theilen — durch Multiplikation.

Als Uebung können Aufgaben wie folgende gegeben werden:

1) Wie heißt der Bruch $^3/_5$, wenn dessen Nenner a) mit 2, b) mit 3, c) mit 4, d) mit 5, e) mit 10, f) mit 16 vervielfacht wird, sein Zähler aber unverändert bleibt?

2) Welche Veränderung muß man mit dem Bruche $^5/_6$ vornehmen, um die Theile desselben a) 2mal, b) 3mal, c) 5mal, d) 7mal, e) 15mal so klein zu machen, als sie ursprünglich sind? und wie heißen dann die auf diese Weise entstandenen Brüche?

3) Den wie vielten Theil des Anfangswerthes hat ein Bruch noch, wenn man dessen Nenner a) mit 3, b) mit 4, c) mit 6, d) mit 7, e) mit 9 multiplizirt, den Zähler aber unverändert läßt? und warum? Gebt diese Größen von dem Bruche $^2/_3$ an!

4) Was geschieht mit einem Bruche, wenn man den Nenner mit einer ganzen Zahl vervielfacht, den Zähler aber unverändert läßt? Weiset dieses an dem Bruche $^4/_7$ nach und gebt die Gründe an!

5) Albin hatte $^7/_8$ fl. in seiner Sparkasse. Die Baarschaft des Eduard war 3 mal, und die des Erich 5 mal so klein; wie viele Gulden hatte jeder dieser Knaben?

6) Als Christgeschenk erhielt Wilhelmine $^4/_5$ ℔ und Cresentia $^7/_9$ ℔ Strickgarn. Nach kurzer Zeit war bei Wilhelmine alles, bis auf den 7ten, und bei Cresentia bis auf den 4ten Theil verbraucht; wie viel Pfund Garn hatte jede noch?

E. Veränderung eines Bruches durch Division des Nenners durch eine ganze Zahl.

(Multiplikation durch Division — Enthaltensein.)

Was Eingangs unter D in Betreff des Nenners gesagt ist, gilt beziehungsweise auch hier; denn in der Bedeutung als Namen kann der Nenner auch nicht dividirt werden, wol aber als Zahl.

Wird der Nenner (d. i. die Anzahl der Theile, in welche die Einheit getheilt ist) des Bruches $^3/_8$ durch 2 getheilt, nämlich 2: $^3/_8 = {^3/_4}$, (d. h. untersucht man, wie oft 2 in 8 enthalten ist), und läßt man den Zähler unverändert, so entsteht der Bruch $^3/_4$. Dieser Nenner ist jetzt 2mal so klein, als vorher; dagegen sind die durch denselben bezeichnete Theile (Viertel) 2mal so groß, folglich auch ihr Werth, als die des Bruches $^3/_8$, was leicht begreiflich; denn 2 Achtel zusammengenommen sind offenbar 2mal so groß, als 1 Achtel. Daher ist auch der Werth des Bruches $^3/_4$ 2mal so groß, als der des Bruches $^3/_8$. Eben so: Bleibt der Zähler des Bruches $^3/_{12}$ ungeändert und dividirt man dessen Nenner durch 3, nämlich 3: $^3/_{12} = {^3/_4}$, so wird der Nenner 3mal so klein, die Theile, somit auch ihre Werthe, sind aber 3mal so groß; daher auch der Werth des Bruches $^3/_4$ selbst 3mal so groß, als der des Bruches $^3/_{12}$ u. s. w. — Als Versinnlichungsmittel dienen dieselben Linien a und b vorstehend unter D zur Veranschaulichung gewählten. Die Erklärung und Anwendung auch auf diesen Fall wird keine Schwierigkeit haben. Auch an angewandten Beispielen lassen sich obige Resultate recht begreiflich nachweisen. Z. B. 1 fl. = 60 kr., $^1/_4$ fl. = 15 kr., $^1/_{12}$ fl. = 5 kr., $^3/_{12}$ fl. = 15 kr., $^3/_4$ fl. = 45 kr. Der Nenner des Bruches $^3/_4$ ist 3mal so klein, als der des Bruches $^3/_{12}$. Die Theile des erstern Bruches (die Viertel), somit ihre Werthe, sind aber 3mal so groß, als die Zwölftel, und deßwegen ist auch der Werth des Bruches $^3/_4$ fl. (= 45 kr.) 3mal so groß, als der des Bruches $^3/_{12}$ fl. (= 15 kr.). Es ist dieses demnach eben so viel, als hätte man diese $^3/_{12}$ fl. (= 15 kr.) gleichsam 3mal genommen; denn 3 × 15 kr. = 45 kr.

Daraus folgt: Wird die Anzahl der in gleiche Theile getheilten Einheit (der Nenner) durch 2, 3, 4, 5 rc. dividirt, also 2, 3, 4, 5mal

so klein, so wird jeder einzelne Theil, somit auch derer Werth 2, 3, 4, 5mal so groß; folglich auch der Werth des Bruches selbst bei unverändertem Zähler 2, 3, 4, 5mal so groß. Es ergeben sich also folgende Veränderungen: **Der Zähler bleibt unverändert; der Nenner wird so vielmal so klein, als der Divisor Einheiten hat, und der Werth des Bruches vergrößert sich um eben so vielmal. Das Verfahren selbst ist eine Multiplikation durch Division — Enthaltensein.**

Was die Uebungsaufgaben anbelangt, so ist man hier beschränkt; denn es können hier nur solche Brüche gewählt werden, deren Nenner durch eine ganze Zahl ohne Rest theilbar ist, wie folgende und ähnliche:

1) Dividire den Nenner des Bruches $^7/_{24}$ a) durch 2, b) durch 3, c) durch 4, d) durch 6, e) durch 8, f) durch 12 und g) durch 24, und gib an, wie die Brüche jetzt bei unverändertem Zähler heißen! (Die unächten Brüche sind in Ganze oder gemischte Zahlen zu verwandeln).

2) Wasfür Brüche und gemischte Zahlen entstehen, wenn der Zähler des Bruches $^3/_{20}$ unverändert bleibt, der Nenner aber a) durch 2, b) durch 4, c) durch 5, d) durch 10, e) durch 20 dividirt wird?

3) Welche Veränderung muß man mit dem Nenner eines Bruches vornehmen, um den Werth desselben um das Mehrfache zu vergrößern? Mache also den Bruch $^{13}/_{48}$ a) 2mal, b) 3mal, c) 4mal, d) 8mal, e) 12mal, f) 16mal und g) 24mal so groß; dann den Bruch $^{11}/_{315}$ a) 3mal, b) 5mal, c) 7mal und d) 9mal so groß, ohne jedoch den Zähler zu verändern!

4) Was geschieht mit einem Bruche, wenn man den Nenner durch eine ganze Zahl dividirt und den Zähler unverändert läßt? Warum? Weise dieses nach an dem Bruche $^9/_{120}$, indem du den Nenner a) durch 3, b) durch 5, c) durch 8 und d) durch 6 dividirest!

5) Theodor hat sich $^7/_{30}$ fl. erspart, Karl aber 3mal und Otto 5mal so viel; wie viele Gulden hat jeder der beiden letzteren? — wie viele Gulden hätte aber jeder dieser, wenn Karl 2mal so viel als Theodor, und Otto 3mal so viel als Karl erspart hätte?

6) Ein Krämer läßt sich $^8/_{75}$ Ztr. Gewürz, 5mal so viel Kaffee, 15mal so viel Zucker und 25mal so viel Tabak bringen; ein Andermal dann 3mal so viel Kaffee als Gewürz, 5mal so viel Zucker als Kaffee und 5mal so viel Tabak als Zucker; wie viel Kaffee, Zucker und Tabak erhielt er jedes Mal?

Anmerkung. Daß solche und ähnliche Aufgaben zur Lösung im Kopfe wol nicht in dieser Verbindung, sondern in Aushebung jedes einzelnen Falles zur gesonderten Berechnung gegeben werden dürfen, braucht kaum einer Erwähnung. Nur Kürze halber sind immer mehre Beispiele gleichsam in eine Aufgabe zusammengenommen, die der Lehrer beim Gebrauche als Einzel-Aufgaben herausheben muß. So enthält die letzte Aufgabe Nr. 6 sechs einzelne Aufgaben, wovon jede als gesondertes Beispiel gegeben und gelös't werden muß. Später, wenn das schriftliche Rechnen mit Brüchen eintritt, können solche verbundene Aufgaben den Schülern wol als stille Beschäftigung zur Ausarbeitung vorgelegt werden. Die Schüler erhalten so in wenigen Aufgaben hinlänglich zu thun und werden dadurch zum eigenen Nach- und Selbstdenken veranlaßt. Das hier Gesagte gilt in allen ähnlichen Fällen und auch für das Folgende.

Resultat des bisher Abgehandelten

unter B, C, D und E in Beziehung der Veränderung eines Bruches durch Multiplikation des Zählers, oder des Nenners mit einer ganzen Zahl, und durch Division in den Zähler, oder in den Nenner durch eine ganze Zahl.

Fassen wir das in obigem Betreffe Abgehandelte in Kürze zusammen, so ergeben sich folgende Schlußfolgerungen:

Multiplikation des Zählers bei unverändertem Nenner, und Division des Nenners bei unverändertem Zähler ist Multiplikation — Vervielfachung der Brüche

durch eine ganze Zahl. — Division des Zählers bei unverändertem Nenner, und Multiplikation des Nenners bei unverändertem Zähler ist **Division der Brüche durch eine ganze Zahl.**

Vervielfacht (multiplizirt) durch eine ganze Zahl kann also ein Bruch werden, wenn entweder der Zähler des Bruches vervielfacht, oder der Nenner desselben dividirt wird; im ersten Falle bleibt der Nenner, im zweiten Falle der Zähler unverändert.

Dividirt durch eine ganze Zahl wird ein Bruch, wenn entweder der Zähler des Bruches dividirt, oder der Nenner desselben multiplizirt wird; im ersten Falle bleibt der Nenner, im zweiten der Zähler unverändert. Es können also die Bruchzahlen auf zweifache Weise multiplizirt und auf zweifache Weise dividirt werden.

Hier können nun gemischte Aufgaben gegeben werden, nämlich solche, daß der Werth eines Bruches bald vergrößert, bald verkleinert werden muß, entweder durch Multiplikation oder Division des Zählers — oder des Nenners, oder daß solches durch Beides geschehen kann. Beispielsweise mögen folgende Aufgaben gegeben sein:

1) Vergrößert den Werth des Bruches $^{3}/_{8}$ durch Multiplikation um 2, 3, 5, 7, 8mal!

2) Vergrößert den Werth des Bruches $^{9}/_{28}$ durch Division um 2, 4, 7, 14, 28mal!

3) Machet den Werth des Bruches $^{18}/_{25}$ durch Division a) 2mal, b) 3mal, c) 6mal, d) 9mal so klein!

4) Wasfür Brüche entstehen aus dem Bruche $^{5}/_{6}$, wenn dessen Werth durch Multiplikation a) 2mal, b) 3mal, c) 5mal, d) 8mal so klein werden soll?

5) Wie wird der Werth des Bruches $^{6}/_{18}$ a) durch Multiplikation, b) durch Division — a) 2mal, b) 3mal, c) 6mal so groß? und wie heißen dann diese Brüche? (In wiefern kann dieses auch bei obigen Brüchen geschehen?)

6) Vermindere den Werth des Bruches $^{15}/_{20}$ a) durch Multiplikation, b) durch Division a) um das 3fache, b) um das 5fache! (Wo und wie kann dieses auch mit vorstehenden Brüchen geschehen.)

Allenthalben lasse man das Verfahren nebst Gründen angeben.

F. Veränderung eines Bruches durch Multiplikation des Zählers und des Nenners mit einer ganzen Zahl.

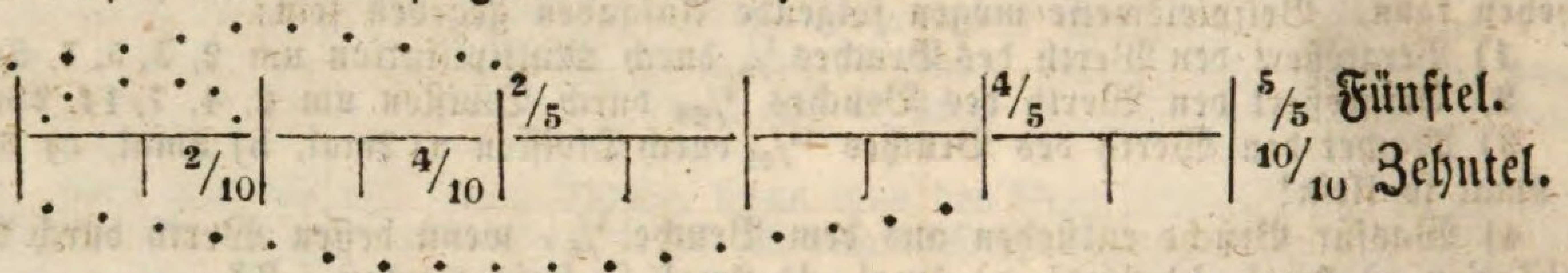
(Erweitern der Brüche.)

Aus dem bisher Gesagten wissen wir:

Wird die Zahl der genommenen Theile einer in gleiche Theile getheilten Einheit (der Zähler) 2, 3, 4, 5 oder mehrmal so groß, als sie anfangs war, so wird der Werth des Bruches bei unverändertem Nenner 2, 3, 4, 5 und mehrmal so groß, als dessen Anfangswerth (Multiplikation). — Wird die Anzahl der in gleiche Theile getheilten Einheit (der Nenner) 2, 3, 4, 5 und mehrmal so groß, so wird jeder einzelne dieser Theile 2, 3, 4, 5 und mehrmal so klein, eben so auch ihr Werth, und mithin der Werth des Bruches selbst 2, 3, 4, 5 und mehrmal so klein, oder: jeder einzelne Theil wird der 2te, 3te, 4te, 5te, . . . nte Theil des frühern Werthes und damit der Werth des Bruches bei unverändertem Zähler der 2te, 3te, 4te, 5te . . . nte Theil des Anfangswerthes (Division).

Wird daher bei einem Bruche Multiplikation des Zählers und Multiplikation des Nenners mit einer und derselben ganzen Zahl zugleich vorgenommen, so wird durch jenes eine eben so große Ver-

vielfachung, als durch dieses (Multiplikation des Nenners) Verkleinerung (Theilung) bewirkt. Eine eben so oftmalige Vergrößerung auf der einen und gleichzeitige Verkleinerung auf der andern Seite, heben sich aber in ihren Wirkungen nothwendig auf und somit muß der Werth eines auf diese Art veränderten Bruches unverändert bleiben. Wird z. B. in dem Bruche $^2/_5$ der Zähler 2mal genommen ($^2/_5 \times 2 = {}^4/_5$), so wird der Bruch und dessen Werth 2mal so groß, aus $^2/_5$ werden $^4/_5$. Wird der Nenner 2mal genommen ($^2/_5 \times 2 = {}^2/_{10}$), so werden die Theile und derer Werth, somit auch der Werth des Bruches selbst 2mal so klein, aus $^2/_5$ werden $^2/_{10}$. Wird nun Zähler und Nenner mit 2 multiplizirt, nämlich $\frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10}$ (aus $^2/_5$ werden $^4/_{10}$), d. h. wird der Werth dieses Bruches durch Multiplikation seines Zählers erst 2mal so groß und sodann durch Multiplikation des Nenners 2mal so klein: so verändert sich wol die Form des Bruches, aber dessen Werth muß unverändert bleiben. Also: $^2/_5 = {}^4/_{10}$ dem Werthe nach. Anschaulich wird dieses etwa an folgendem Striche.



Dieser Strich ist durch die längern Theilstriche in 5 gleiche Theile (Fünftel) getheilt, wovon, dem obigen Bruche gemäß, 2 Theile oder 2 Fünftel genommen sind (angedeutet durch den obersten punktirten Bogenstrich). Wird jeder der 5 Theile nochmal getheilt, wie dieses durch die kürzern Theilstriche geschehen, so gibt jedes Fünftel 2 Theile, das Ganze also 2mal so viele oder 10 Theile und heißen nun Zehntel, die aber zweimal so klein oder nur halb so groß sind, als die ursprünglichen Theile oder als die Fünftel. Die Zeichnung stellt nun das oben Gesagte augenscheinlich dar. 4 Fünftel (angedeutet durch den untern punktirten Bogen), sind 2mal so groß als 2 Fünftel. — 2 Zehntel sind 2mal so klein oder nur halb so groß als 2 Fünftel (angedeutet durch den obern punktirten Bogen). — Dagegen 4 Zehntel sind eben so groß, wie 2 Fünftel, was der Augenschein lehrt. Also: $^2/_5 = {}^4/_{10}$ dem Wesen (dem Werthe nach); der Form nach sind die Fünftel 2mal so groß als die Zehntel, und die Zehntel 2mal so klein oder nur halb so groß als die Fünftel. Auch dieses zeigt die Anschauung.

Angewandte Beispiele beweisen dieses ebenfalls.

$^1/_5$ fl. = 12 kr.; $^2/_5$ fl. = 24 kr. — $^1/_{10}$ fl. = 5 kr.; $^4/_{10}$ fl. = 24 kr.

Die Erklärung ergibt sich leicht.

Also: **Wird Zähler und Nenner eines Bruches mit ein und derselben ganzen Zahl vervielfacht, so werden Zähler und Nenner der Zahl (der Form) nach eben so vielmal so groß, als der Multiplikator Einheiten hat; die durch den Nenner angezeigten Theile werden um so vielmal so klein, der Werth des Bruches aber bleibt unverändert. Es verändert sich wol die Form und der Namen (die Benennung)**

der Theile, nicht aber das Wesen (der Werth) des Bruches. Das Verfahren selbst heißt **Erweitern der Brüche.**

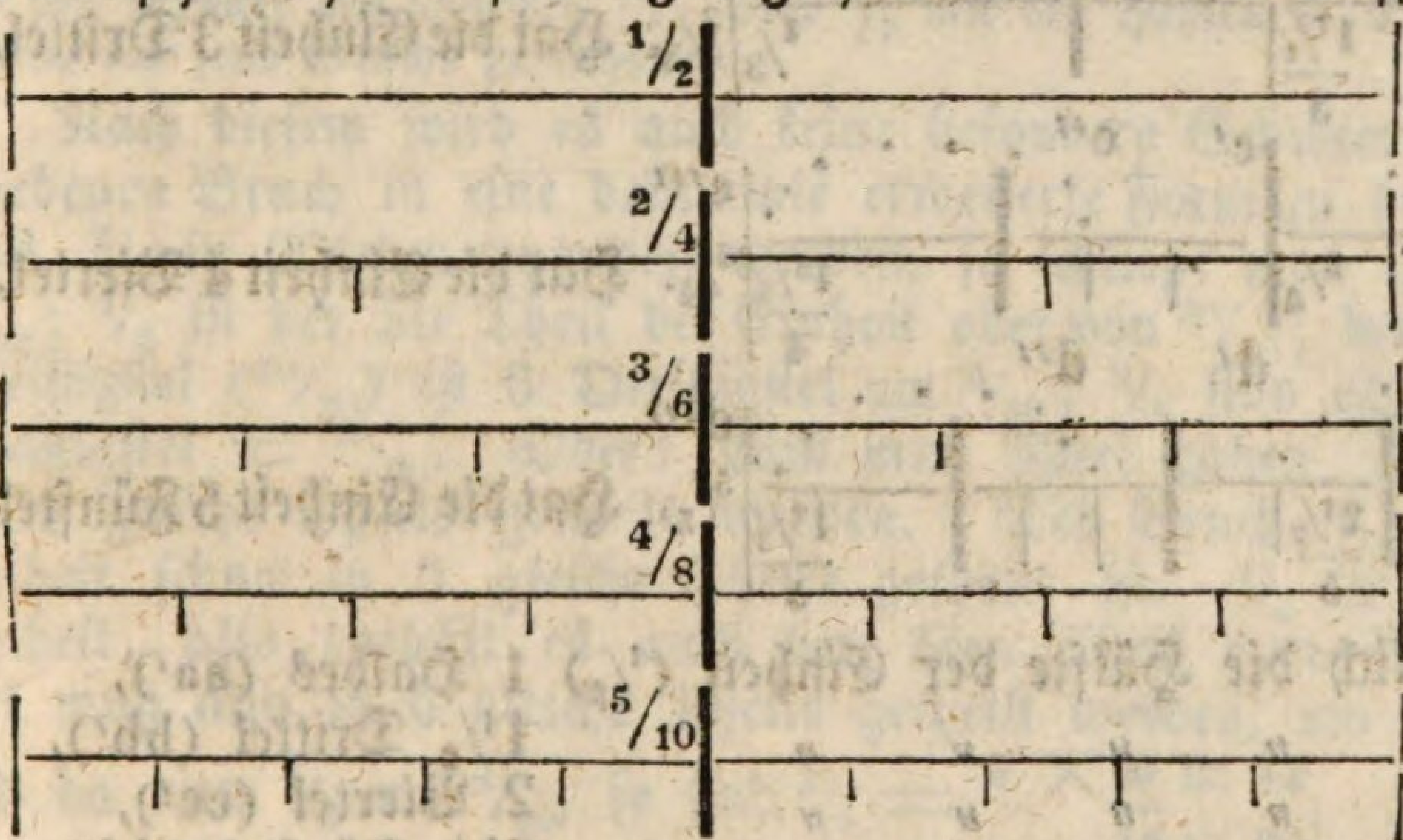
Da die Anzahl der Zahlen, mit welchen Zähler und Nenner eines Bruches multiplizirt werden kann, unendlich groß ist, so kann auch jeder Bruch in unendlich vielfachen Formen, (wenn auch nicht in jeder Form eines einfachen Bruches, denn z. B. $^1/_2$ gibt nicht einen einfachen Bruch in der Form von Drittel), dargestellt werden, ohne daß der Werth verändert wird. Z. B.

$^1/_2 = {}^2/_4 = {}^3/_6 = {}^4/_8 = {}^5/_{10} = {}^6/_{12} = {}^7/_{14} = {}^8/_{16}$ ꝛc.
$^1/_3 = {}^2/_6 = {}^3/_9 = {}^4/_{12} = {}^5/_{15} = {}^6/_{18} = {}^7/_{21} = {}^8/_{24}$ ꝛc.
$^1/_4 = {}^2/_8 = {}^3/_{12} = {}^4/_{16} = {}^5/_{20} = {}^6/_{24} = {}^7/_{28} = {}^8/_{32}$ ꝛc.
$^1/_5 = {}^2/_{10} = {}^3/_{15} = {}^4/_{20} = {}^5/_{25} = {}^6/_{30} = {}^7/_{35} = {}^8/_{40}$ ꝛc.
u. s. w.

$^2/_3 = {}^4/_6 = {}^6/_9 = {}^8/_{12} = {}^{10}/_{15} = {}^{12}/_{18} = {}^{14}/_{21} = {}^{16}/_{24}$ ꝛc.
$^3/_5 = {}^6/_{10} = {}^9/_{15} = {}^{12}/_{20} = {}^{15}/_{25} = {}^{18}/_{30} = {}^{21}/_{35} = {}^{24}/_{40}$ ꝛc.
$^5/_9 = {}^{10}/_{18} = {}^{15}/_{27} = {}^{20}/_{36} = {}^{25}/_{45} = {}^{30}/_{54} = {}^{35}/_{63} = {}^{40}/_{72}$ ꝛc.
u. s. w.

Die anschauliche Darstellung möge hier nur an Einem Beispiele gezeigt werden.

a
b
c
d
e



Das Ganze hat:
$^2/_2$ = 2 Halbe.
$^4/_4$ = 4 Viertel.
$^6/_6$ = 6 Sechstel.
$^8/_8$ = 8 Achtel.
$^{10}/_{10}$ = 10 Zehntel.

1 Theil oder 1 Halbes von a ist gleich 2 Theilen oder 2 Viertel von b, gleich 3 Theilen oder $^3/_6$ von c, gleich 4 Theilen oder $^4/_8$ von d, gleich 5 Theilen oder $^5/_{10}$ von e, u. s. w. Daher sind auch 5 Theile oder $^5/_{10}$ = 4 Theilen oder $^4/_8$ von d, = $^3/_6$ von c, = $^2/_4$ von b, = $^1/_2$ von a. — 4 Theile oder $^4/_8$ von d = 3 Theilen oder $^3/_6$ von c, = $^2/_4$ von b, = $^1/_2$ von a, = $^5/_{10}$ von e u. s. f.

Diese Versinnlichung zeigt augenfällig, daß die Brüche $^1/_2$, $^2/_4$, $^3/_6$, $^4/_8$, $^5/_{10}$ im Wesen (dem Werthe) nach ganz gleich, und nur der Form (den Zahlen) nach verschieden sind. So sind auch z. B. $^4/_{12}$, $^9/_{27}$, $^{16}/_{48}$, $^{28}/_{84}$, $^{40}/_{120}$, $^{52}/_{156}$ ꝛc. nur veränderte Formen des Bruches $^1/_3$; ebenso $^{14}/_{18}$, $^{35}/_{45}$, $^{70}/_{90}$, $^{77}/_{99}$, $^{105}/_{135}$ ꝛc. nur veränderte Formen des Bruches $^7/_9$ u. s. f.

Es ist vorher angedeutet worden, daß die Brüche ohne Werthsveränderung nicht in jeder Form als einfache Brüche dargestellt werden können. Will man sie dennoch unter jeder Form darstellen, so kann dieses allerdings geschehen, aber es entstehen sodann nebst einfachen Brüchen noch Doppelbrüche. Begreiflich wird dieses durch die Darstellung der Einheit in Bruchform, welche sich, wie wir schon Seite 12 gesehen, in jeder einfachen Bruchform geben läßt.

Ist nämlich die Einheit $(1) = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8} = \frac{9}{9} = \frac{10}{10}$ ꝛc.;

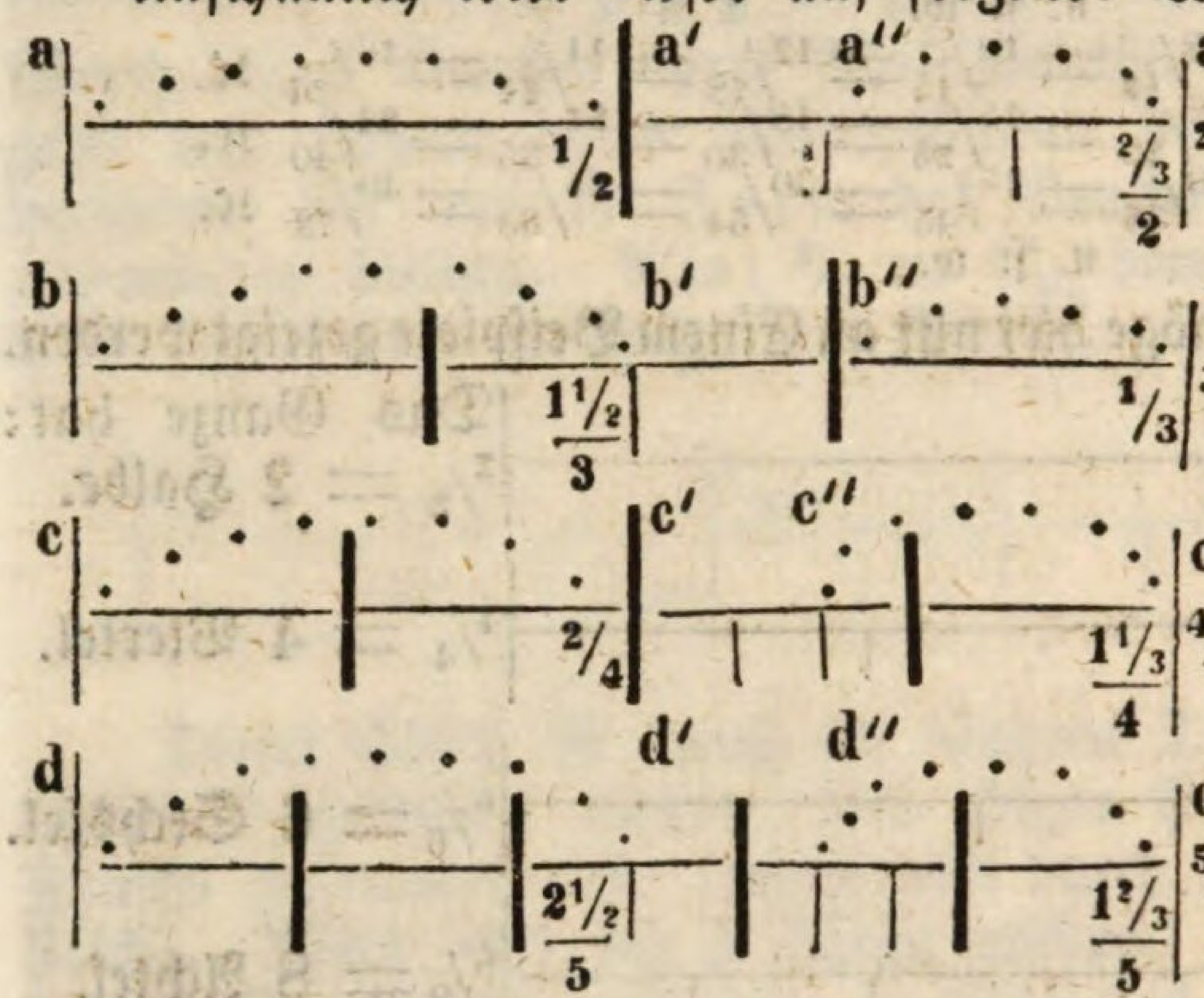
so ist die Hälfte $\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = \frac{1\frac{1}{2}}{3} = \frac{2}{4} = \frac{2\frac{1}{2}}{5} = \frac{3}{6} = \frac{3\frac{1}{2}}{7} = \frac{4}{8} = \frac{4\frac{1}{2}}{9} = \frac{5}{10}$ ꝛc.;

ebenso ist ein Drittel $\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1\frac{1}{3}}{4} = \frac{1\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{6} = \frac{2\frac{1}{3}}{7} = \frac{2\frac{2}{3}}{8} = \frac{3}{9} = \frac{3\frac{1}{3}}{10}$ ꝛc.;

eben so sind zwei Drittel $\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1\frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3} = \frac{2\frac{2}{3}}{4} = \frac{3\frac{1}{3}}{5} = \frac{4}{6} = \frac{4\frac{2}{3}}{7} = \frac{5\frac{1}{3}}{8} = \frac{6}{9} = \frac{6\frac{2}{3}}{10}$ ꝛc.

eben so sind drei Fünftel $\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1\frac{1}{5}}{2} = \frac{1\frac{4}{5}}{3} = \frac{2\frac{2}{5}}{4} = \frac{3}{5} = \frac{3\frac{3}{5}}{6} = \frac{4\frac{1}{5}}{7} = \frac{4\frac{4}{5}}{8} = \frac{5\frac{2}{5}}{9} = \frac{6}{10}$ ꝛc.

Anschaulich wird dieses auf folgende Weise:



$\frac{2}{2}$. Hat die Einheit 2 Halbe,

$\frac{3}{3}$. Hat die Einheit 3 Drittel,

$\frac{4}{4}$. Hat die Einheit 4 Viertel,

$\frac{5}{5}$. Hat die Einheit 5 Fünftel.

so hat augenscheinlich die Hälfte der Einheit ($\frac{1}{2}$) 1 Halbes (aa′),
" " " " " " " $1\frac{1}{2}$ Drittel (bb′),
" " " " " " " 2 Viertel (cc′),
" " " " " " " $2\frac{1}{2}$ Fünftel (dd′),

Ebenso ist ferner ein Drittel der Einheit ($\frac{1}{3}$) 1 Drittel (b″b‴), oder 2 Drittel von $\frac{1}{2}$ ($\frac{2}{3}$ Halbe) (a″a‴) oder $1\frac{1}{3}$ Viertel (c″c‴), oder $1\frac{2}{3}$ Fünftel (d″d‴) (durch die punktirte Theilung versinnlicht), und so in anderen Fällen.

Werden die Doppelbrüche in einfache verwandelt, als $\frac{1\frac{1}{2}}{3} = \frac{3}{6}$, (denn $\frac{1}{2}$ Drittel ist gleich $\frac{1}{6}$, 1 Drittel $= \frac{2}{6}$, oder $1\frac{1}{2}$ Drittel $= \frac{3}{2}$ Drittel $= \frac{3}{6}$); $\frac{2\frac{1}{2}}{5} = \frac{5}{10}$, (denn $\frac{1}{2}$ Fünftel $= \frac{1}{10}$, 2 Fünftel $= \frac{4}{10}$, oder $2\frac{1}{2}$ Fünftel $= \frac{5}{2}$ Fünftel oder $\frac{5}{10}$); $\frac{3\frac{1}{2}}{7} = \frac{7}{14}$; $\frac{4\frac{1}{2}}{9} = \frac{9}{18}$; $\frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{2}{6}$, (denn $\frac{1}{3}$ Halbes $= \frac{1}{6}$); $\frac{1\frac{1}{3}}{4} = \frac{4}{12}$, (denn $\frac{1}{3}$ Viertel oder der 3te Theil eines Viertels $= \frac{1}{12}$, $1\frac{1}{3}$ Viertel $= \frac{4}{3}$ Viertel $= \frac{4}{12}$); $\frac{1\frac{2}{3}}{5} = \frac{5}{15}$ u. s. f.: so finden wir die dadurch entstandenen einfachen Brüche auch in der vorhergehenden Reihenfolge der einfachen Brüche von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$, was auch bei allen übrigen Doppelbrüchen der Fall ist.

Um Doppelbrüche in einfache Brüche zu verwandeln, wird der Zählerbruch durch Multiplikation mit seinem Nenner, wenn derselbe eine gemischte Zahl ist, (wie oben $\frac{1\frac{1}{2}}{3}$) in eine ganze Zahl verwandelt [aufgelöſ't], welche Zahl zum Zähler genommen wird; sodann multiplizirt man beide Nenner miteinander, welches Produkt den neuen Nenner für den einfachen Bruch gibt. Iſt der Zählerbruch keine gemischte Zahl (wie oben $\frac{2/3}{2}$), so bleibt der Zähler unverändert und das Produkt der beiden Nenner iſt der Nenner für den einfachen Bruch, wie an vorſtehenden Beiſpielen zu erſehen.

Der Lehrer halte bei den Schülern ſtrenge darauf, daß ſie Form und Weſen eines Bruches genau unterſcheiden. Er mache die Schüler auch aufmerkſam, daß in obigen Reihenfolgen der einfachen Brüche, z. B. in der erſten Reihenfolge, der Zähler und der Nenner bei dem Bruche $^2/_4$ 2mal, bei $^3/_6$ 3mal, bei $^4/_8$ 4mal, bei $^5/_{10}$ 5mal u. ſ. w., ſo groß ſind, als bei $^1/_2$. Eben ſo ſind Zähler und Nenner bei dem Bruche $^{10}/_{18}$ 2mal, bei $^{15}/_{27}$ 3mal, bei $^{20}/_{36}$ 4mal, bei $^{25}/_{45}$ 5mal ſo groß u. ſ. w., als bei $^5/_9$, und ſo in allen übrigen Reihenfolgen. Eine einfache Frage wird ſodann genügen, um die Schüler ſelbſt auf den Gedanken zu leiten, daß man nur nöthig habe, den Zähler und den Nenner des Bruches $^1/_2$, oder $^5/_9$ mit den Zahlen 2, 3, 4, 5 ꝛc. zu vervielfachen, um jene Brüche zu erhalten.

Nach dieſem wird es auch keine beſondere Schwierigkeit haben, einen gegebenen Bruch in eine beſtimmte erweiterte Form zu bringen. Soll nun z. B. $^3/_5$ in 30tel verwandelt werden, ſo ſchließt man ſo: Die Einheit $= {^{30}/_{30}}$; $^1/_5$ iſt der 5te Theil der Einheit oder von $^{30}/_{30}$; der 5te Theil von 30 Dreißigſtel ($^{30}/_{30}$) iſt 6 Dreißigſtel $= {^6/_{30}}$; $^3/_5$ ſind alſo 3 mal 6 = 18 Dreißigſtel $= {^{18}/_{30}}$. Oder: Will man 30tel haben, ſo muß die Einheit in 30 gleiche Theile getheilt werden. Der Bruch $^3/_5$ zeigt an, daß die Einheit ſchon in 5 gleiche Theile getheilt iſt. $^1/_5$ iſt der 5te Theil der Einheit, alſo enthält es auch den 5ten Theil von $^{30}/_{30} = {^6/_{30}}$; jedes 5tel muß alſo in 6 gleiche Theile getheilt werden, um 30tel zu erhalten; und da nun $^1/_5 = {^6/_{30}}$, ſo ſind $^3/_5 = \frac{3 \times 6 = 18}{30 = 30}$. Oder: Da $^1/_5$ von $^{30}/_{30} = {^6/_{30}}$, alſo Zähler und Nenner bei $^6/_{30}$ 6mal ſo groß ſind, als bei $^1/_5$, ſo vervielfacht man Zähler und Nenner des gegebenen Bruches mit der Zahl 6, um 30tel zu erhalten: $\frac{3}{5} \frac{\times}{\times} \frac{6}{6} = \frac{18}{30}$.

Regel: Soll ein Bruch in eine beſtimmte erweiterte Form (unter einen andern Nenner) gebracht werden, ſo dividire man mit dem Nenner (als Zahl) des gegebenen Bruches in den neuen gegebenen Nenner des zu ſuchenden Bruches; der Quotient iſt dann diejenige Zahl, mit welcher der gegebene Bruch durch Multiplikation ſeines Zählers und Nenners erweitert wird, um ihn in der verlangten Form zu erhalten.

Das Erweitern der Brüche muß fleißig geübt werden, weil es beim Addiren, Subtrahiren und oft auch beim Dividiren mit Brüchen vorkommt. Als Beiſpiele zu Uebungsaufgaben mögen folgende dienen.

1. Erweitere a) $^1/_6$, b) $^1/_9$, c) $^1/_{12}$, d) $^1/_{19}$ durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ꝛc. ꝛc.!

2. Drücke $^4/_7$ in 3, 5, 6, 9, 4, 8, 10mal ſo großen Zahlen aus, ohne den Werth dieſes Bruches zu verändern!

3. Bilde Reihen mit 10, 20, 25 ꝛc. erweiterten Brüchen, deren Werthe jedoch dem des gegebenen Bruches ſtets gleich ſind, und wähle dazu die Brüche a) $^1/_8$, b) $^5/_7$, c) $^4/_{11}$, d) $^{12}/_{25}$!

4. Mit welcher Zahl sind Zähler und Nenner des Bruches $^3/_5$ vervielfacht, (ist der Bruch erweitert) worden, wenn daraus $^9/_{15}$, $^{21}/_{35}$, $^{15}/_{25}$, $^{30}/_{50}$, $^{24}/_{40}$, $^{36}/_{60}$ ꝛc. entstanden ist?

5. Wie lassen sich aus Fünftel 10tel, 15tel, 20tel, 25tel, 30tel, 35tel, 40tel bilden? Verwandle $^4/_5$ in 10tel, 15tel u. s. w.!

6. Wie viele 16tel, 24tel, 32tel, 56tel, 64tel sind a) $^1/_4$, b) $^5/_8$?

7. Jemand entrichtete seine Steuer zu $7^1/_2$ fl. in lauter 10tel fl.; wie viele 10tel fl. waren es?

8. Ein Melber hat $11^1/_4$ Metzen Grütze und $5^5/_8$ Metzen Reiß; wie viele 16tel Metzen hatte er von jeder Sorte?

9. Verwandle a) $^1/_2$, b) $^1/_3$, c) $^1/_4$, d) $^3/_4$, e) $^5/_6$, f) $^7/_8$ in Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel ꝛc.!

10. Wie heißen folgende Doppelbrüche in einfachen Brüchen ausgedrückt? $\frac{1^1/_2}{3}$, $\frac{1^1/_3}{4}$, $\frac{3^3/_4}{2}$, $\frac{2^4/_5}{3}$, $\frac{^1/_2}{2}$, $\frac{^3/_2}{4}$, $\frac{^2/_3}{8}$ ꝛc. Wie werden Doppelbrüche in einfache verwandelt?

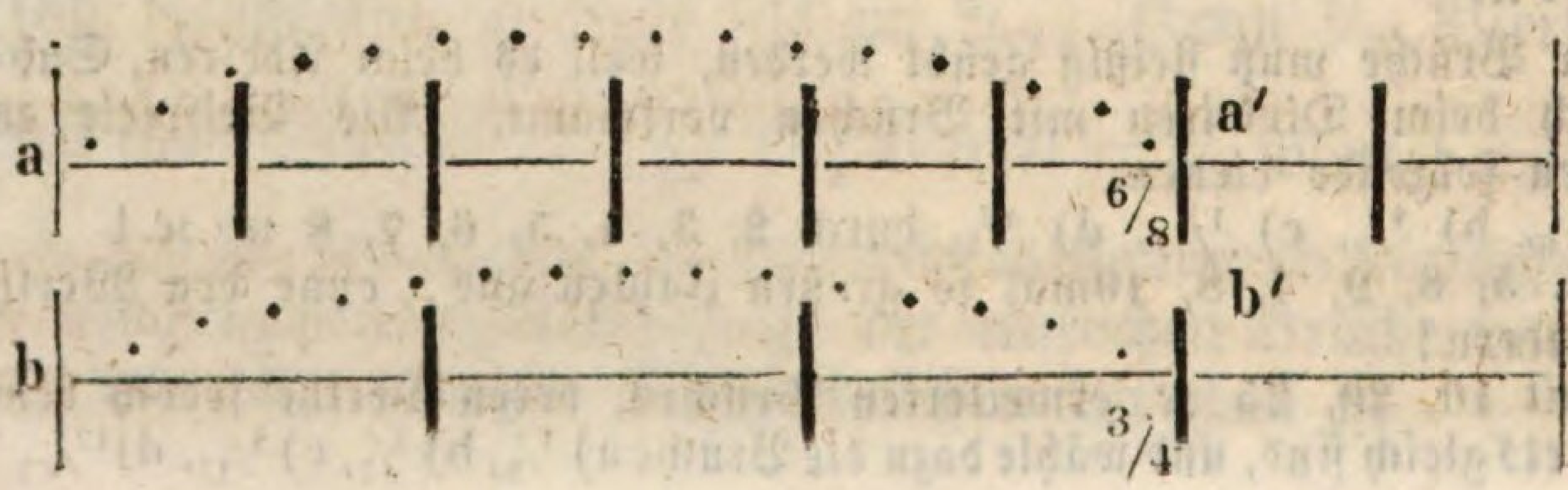
G. Veränderung eines Bruches durch Division des Zählers und des Nenners mit einer ganzen Zahl.

(Kürzen oder Zurückführen der Brüche.)

Wird die Anzahl der genommenen Theile einer in gleiche Theile getheilten Einheit (der Zähler) 2, 3, 4, 5 und mehrmal so klein, so wird auch der Werth des Bruches bei unverändertem Nenner 2, 3, 4, 5 und mehrmal so klein. (Division.) — Wird die Anzahl der in gleiche Theile getheilten Einheit (der Nenner) 2, 3, 4, 5 oder mehrmal so klein, so wird jeder einzelne dieser Theile 2, 3, 4, 5 oder mehrmal so groß, demnach auch der Werth des Bruches bei unverändertem Zähler 2, 3, 4, 5 oder mehrmal so groß. (Multiplikation).

Wird daher bei einem Bruche Division des Zählers und Division des Nenners mit einer und derselben Zahl **zugleich** vorgenommen, so wird durch jenes eine eben so vielmalige Verkleinerung des Bruchwerthes, als durch dieses (Division in den Nenner) eine eben so vielmalige Vergrößerung des Bruchwerthes bewirkt. Gleichzeitige Verkleinerung auf der einen und Vergrößerung auf der andern Seite heben sich ebenfalls wieder auf, und der Werth des Bruches bleibt ungeändert. Wird z. B. bei dem Bruche $^6/_8$ der Zähler durch 2 dividirt ($2 : {^6/_8} = {^3/_8}$), also 2mal so klein gemacht, so entsteht $^3/_8$, was einen 2mal so kleinen Werth gibt, als $^6/_8$. Wird der Nenner allein durch 2 getheilt ($2 : {^6/_8} = {^6/_4}$), wodurch $^6/_4$ entsteht, so werden die Theile und derer Werthe 2mal so groß, somit hat auch der Bruch einen 2mal so großen Werth. Wird nun erst der Werth des Bruches 2mal so klein, und sodann 2mal so groß durch Division des Zählers und des Nenners durch die Zahl 2, nämlich $\frac{2 : 6}{2 : 8} = \frac{3}{4}$, so heben sich beide Wirkungen gegenseitig auf und der Werth des Bruches bleibt ungeändert, also $^6/_8 = {^3/_4}$.

Dieses veranschaulichen folgende Linien:



Das Ganze hat 8 Achtel.

Das Ganze hat 4 Viertel.

Beide Linien sind gleich lang; a ist in 8 Theile (8tel), wovon 6, b in 4 Theile (4tel) getheilt, wovon 3 Theile genommen sind, von welchen jeder 2mal so groß ist, als 1 Theil von a. Es ist augenscheinlich, daß 3 Theile von b eben so groß sind, als 6 Theile von a, weil diese 2mal so klein oder nur halb so groß sind, als die von b. Also aa' oder $^6/_8$ = bb' oder $^3/_4$. Oder: 6 Achtel sind zwar 2mal so viele Theile, als 3 Viertel, und 3 Viertel sind 2mal so wenig oder nur halbmal so viele Theile, als 6 Achtel; die Viertel sind aber 2mal so groß, als die Achtel, und deßwegen müssen $^6/_8$ und $^3/_4$ hinsichtlich des Werthes gleich sein.

In einem angewandten Beispiele: $^1/_8$ fl. = $7^1/_2$ kr.; $^6/_8$ fl. = 45 kr. — $^1/_4$ fl. = 15 kr.; $^3/_4$ fl. = 45 kr.; also auch hier $^6/_8 = {}^3/_4$.

Durch Division in den Zähler des Bruches $^6/_8$ mit der Zahl 2 wird $^3/_8$; $^3/_8$ fl. = $22^1/_2$ kr., also zweimal so wenig oder nur halbmal so viel, als der Werth des Bruches $^6/_8$. Durch Division in den Nenner mit derselben Zahl wird $^6/_4$; $^6/_4$ fl. = 90 kr., also ein 2mal so großer Werth, als $^6/_8$ fl. Durch Division in den Zähler und Nenner durch 2, wird $^3/_4$; $^3/_4$ fl. = 45 kr., also ein eben so großer Werth, als der des Bruches $^6/_8$.

Hieraus ergibt sich nun folgende Veränderung:

Wird Zähler und Nenner eines Bruches durch eine und dieselbe Zahl dividirt, so werden Zähler und Nenner der Zahl nach eben so vielmal so klein, als der Divisor Einheiten hat, die Theile werden aber eben so vielmal so groß, und der Werth des Bruches bleibt ungeändert. Es verändert sich wol die Form (die Zahlen, durch welche der Bruch dargestellt wird), nicht aber das Wesen (der Werth) des Bruches. Das Verfahren selbst heißt **Kürzen, Zurückführen, auch Aufheben der Brüche.**

Das Erweitern der Brüche ist unbeschränkt, weil der Zähler und Nenner jedes Bruches sich durch jede ganze Zahl vervielfachen läßt. Bei dem Kürzen der Brüche tritt insofern Beschränkung ein, als sich nicht jeder Bruch, wenigstens nicht ohne Rest, durch jede Zahl in Zähler und Nenner dividiren läßt. Kürzen lassen sich alle jene Brüche, welche durch Vervielfachung des Zählers und Nenners mit einer ganzen Zahl entstanden sind, und zwar durch Division mit derselben Zahl, oder auch mit den Faktoren dieser Zahl. Folgende Brüche lassen sich kürzen: $^8/_{10}$ durch 2, $^{12}/_{16}$ durch 4, oder durch 2 und 2; $^{25}/_{35}$ durch 5, $^{45}/_{60}$ durch 15, auch durch 5 und 3 u. s. w.

Ist die Kürzungszahl, d. i. diejenige Zahl, mit welcher der Bruch sich kürzen läßt, also Zähler und Nenner dividirt werden muß, unbekannt, so muß dieselbe aufgesucht werden. Diese zu finden, gibt es mehre Merkmale, die wir nachher kennen lernen werden.

Auch das Kürzen der Brüche muß häufig geübt werden, weil gekürzte Brüche nicht nur das Rechnungsgeschäft sehr erleichtern und abkürzen, sondern weil man sich auch leichter einen Begriff von der Größe derselben machen kann, je kleiner die Zahlen ihrer Zähler und Nenner sind.

Bei den Uebungen schlage man etwa folgenden Weg ein:

1. Man gebe zuerst Aufgaben, zu denen die Kürzungszahl gegeben ist, z. B. $^{15}/_{20}$ soll durch 5 gekürzt werden. $\frac{5:15}{5:20}=\frac{3}{4}$.

2. Aufgaben, zu denen aus dem gegebenen neuen Nenner die Aufhebungszahl gesucht werden kann, z. B.: Verwandle $^{20}/_{24}$ in 6tel! Hier ist zu untersuchen, wie viele 24tel auf 1 Sechstel kommen. Da 6 Sechstel = $^{24}/_{24}$, so ist 1 Sechstel der 6te Theil von 24 = 4. Um aus 24tel 6tel zu erhalten, muß der Nenner 24 also mit 4 dividirt werden. Soll nun der Werth des Bruches unverändert bleiben, so muß auch der Zähler durch 4 dividirt werden, also: $\frac{4:20}{4:24}=\frac{5}{6}$. (Hieße der Bruch $^{19}/_{24}$, so entstände ein Doppelbruch, nämlich: $\frac{4:19}{4:24}=\frac{4^3/_4}{6}$)

3. Aufgaben, wo der Zähler Kürzungszahl ist, also Brüche, welche Stammbrüchen gleich sind. Z. B. $^4/_8 = {}^1/_2$; $^5/_{20} = {}^1/_4$; $^5/_{25} = {}^1/_5$; $^7/_{28} = {}^1/_4$ rc. Beweis: $^4/_8 = {}^1/_2$; denn $^8/_8 = 1$; $^4/_8$ = 4 Theilen von $^8/_8$; 4 ist aber die Hälfte von 8, und daher auch $^4/_8$ die Hälfte von $^8/_8$ oder 1 Ganzen, also $^4/_8 = {}^1/_2$.

4. Aufgaben, wobei für Zähler und Nenner die Aufhebungszahl gesucht werden muß, also Brüche, die nicht Stammbrüchen gleich sind. Z. B. $^8/_{12} = {}^2/_3$; denn $^{12}/_{12} = 1$; $^8/_{12}$ sind 2mal so viele Theile, als $^{12}/_{12}$ 3mal so viele hat, nämlich 8 = 2mal 4, und 12 = 3mal 4, also $^8/_{12} = {}^2/_3$. Oder: Wenn das Ganze 12 Theile hat, so sind 8 Theile $^2/_3$ des Ganzen, denn 8 sind 2mal 4, und 12 sind 3mal 4, d. h. 8 sind 2 Vierer und 12 sind 3 Vierer; also $^8/_{12} = {}^2/_3$. Die Kürzungszahl ist daher 4.

Beispiele für Uebungsaufgaben mögen sein:

1. Kürze folgende Brüche: a) $^3/_9$ durch 3, b) $^8/_{20}$ durch 4, c) $^{15}/_{25}$ durch 5, d) $^{18}/_{30}$ durch 6, e) $^{21}/_{28}$ durch 7, f) $^{72}/_{88}$ durch 8, g) $^{153}/_{225}$ durch 9! und nenne selbst Brüche, die sich durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 rc. kürzen lassen!

2. Verwandle a) $^9/_{12}$ in 3tel, b) $^{12}/_{16}$ in 4tel c) $^{28}/_{35}$ in 5tel, d) $^{25}/_{30}$ in 6tel, e) $^{28}/_{42}$ in 7tel! und gib an, wie dabei zu verfahren ist!

3. Durch welche Zahlen ist der Bruch $^{60}/_{360}$ jedes Mal gekürzt worden, wenn aus ihm die Brüche $^1/_6$, $^2/_{12}$, $^3/_{18}$, $^4/_{24}$, $^5/_{30}$, $^6/_{36}$, $^{10}/_{60}$, $^{12}/_{72}$, $^{15}/_{90}$, $^{20}/_{120}$, $^{30}/_{180}$ entstanden sind? Warum?

4. Verwandle folgende abgeleitete Brüche in Stammbrüche: a) $^2/_4$, b) $^3/_9$, c) $^4/_{12}$, d) $^5/_{15}$, e) $^6/_{24}$, f) $^9/_{45}$, g) $^{12}/_{48}$!

5. Welche Brüche von $^1/_{16}$, $^2/_{16}$ rc. bis $^{15}/_{16}$; dann welche von $^1/_{30}$ bis $^{29}/_{30}$ lassen sich kürzen, ohne daß Doppelbrüche entstehen? und wie heißen sie in ihrer gekürzten Form?

6. Führet folgende Brüche auf ihre kleinste Benennung (Form) zurück, ohne derer Werthe zu verändern: a) $^6/_8$ kr., b) $^{15}/_{24}$ fl., c) $^9/_{27}$ ℔, d) $^{20}/_{32}$ Ztr., e) $^{25}/_{50}$ Ellen, f) $^{32}/_{48}$ Mtz., g) $^{35}/_{56}$ Schfl., und gebt die Gründe an!

Die möglichen Veränderungen, die mit Brüchen vorgenommen werden können, sind zuerst in Begriffen, sodann auf anschauliche Weise und endlich in angewandten Beispielen dargestellt und erklärt worden. Die anschauliche Verfahrungsweise wird für schwächere Schüler die begreiflichere sein. Welcher Weg eingeschlagen werden will, bleibt dem Lehrer überlassen.

Es sind zwar noch mehre Veränderungen möglich, wie das Zerfällen des Nenners, Vergrößern und Verkleinern des Zählers oder des Nenners um 1, 2, 3 rc.; allein diese Veränderungen haben keinen praktischen Nutzen und bleiben daher unberührt.

8. Das Verwandeln ungleichnamiger Brüche in gleichnamige.

Beim Rechnen trifft es sich häufig, daß Brüche mit verschiedenen Nennern (ungleichnamige Brüche) zusammengezählt, oder ein solcher Bruch von einem andern abgezogen werden muß. Dieses kann begreiflicher Weise jedoch nur dann geschehen, wenn die Bruchzahlen gleiche Nenner haben, also gleichnamig sind. Auch das gegenseitige Werthsverhältniß zweier oder mehrer Brüche läßt sich nur dann unmittelbar und sicher

erkennen, wenn dieselben gleiche Namen haben. In allen diesen Fällen müssen ungleichnamige Brüche in gleichnamige verwandelt werden. Die Möglichkeit dieser Verwandlung liegt darin, weil jeder Bruch als ein, oder als mehre Theile einer in gleiche Theile getheilten Einheit angesehen, die Einheit aber in zwei oder mehre und in so viele Theile getheilt oder als getheilt gedacht werden kann, als man will; daher auch der Werth eines Bruches in unendlich mannigfacher Form darzustellen möglich ist. (S. 12 u. 33.) Eben deßwegen können ungleichnamige Brüche in gleichnamige verwandelt werden, und zwar in jedem Falle jedoch nur durch Erweiterung der Brüche, d. h. durch Multiplikation des Zählers und Nenners mit einer ganzen Zahl, wenn nicht möglicherweise Doppelbrüche entstehen sollen. (Siehe S. 34.) Sind zwei oder mehre Brüche gegeben, die unter einerlei Benennung gebracht werden sollen, so ist für jeden einzelnen Bruch diejenige Zahl zu suchen, mit welcher Zähler und Nenner des Bruches vervielfacht werden muß, damit sämmtlich gegebene Brüche unter ein und demselben Nenner erscheinen.

A. Zwei ungleichnamige Brüche sind gleichnamig zu machen.

a) Der gemeinschaftliche oder Hauptnenner ist das Produkt beider Nenner der gegebenen Brüche.

$^1/_3$ und $^1/_4$ sind gleichnamig zu machen!

Sollen diese beiden ungleichnennerigen Brüche zusammengezählt, oder der eine von dem andern abgezogen werden, oder soll ihr gegenseitiges Werthsverhältniß unmittelbar beurtheilt werden können: so müssen beide Brüche unter einen gleichen Namen gebracht werden, was aber nur dadurch möglich wird, wenn man beide Brüche in einer andern Form, und zwar unter größern Zahlen ohne Veränderung ihres Werthes darstellt, d. h. erweitert. Wie wir aus einer frühern Unterrichtsstunde wissen (S. 32), werden die Brüche erweitert, indem man den Zähler und Nenner eines Bruches mit ein und derselben ganzen Zahl vervielfacht, also:

$$\frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6} \qquad \frac{1 \times 2}{4 \times 2} = \frac{2}{8}$$

$$\frac{1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{3}{9} \qquad \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$$

$$\frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$$

Auf diese Weise einer fortgesetzten Erweiterung jedes gegebenen Bruches haben wir schon zwei Brüche gefunden, deren Nenner gleich sind, ohne daß der Werth der Brüche, noch ihr gegenseitiges Werthsverhältniß geändert wurde; nur die Form ist eine andere geworden. Beide Brüche kommen also in ihrer Benennung zusammen (werden gleichnamig), wenn der Bruch $^1/_3$ durch die Zahl 4, und der Bruch $^1/_4$ durch die Zahl 3 erweitert wird, wodurch man dann den gemeinschaftlichen Nenner Zwölftel erhält. 4 ist aber auch der Nenner des Bruches $^1/_4$, und 3 der Nenner des Bruches $^1/_3$. Daraus sehen wir, daß die Brüche $^1/_3$ und $^1/_4$ gleichnamig gemacht werden können, wenn Zähler und Nenner jedes dieser

Brüche mit dem Nenner des andern Bruches multiplizirt werden. In dieser erweiterten Form mit gleichen Nennern können diese Brüche jetzt zusammengezählt, oder der eine von dem andern abgezogen werden, so wie auch jetzt der gegenseitige Werth Jedem augenfällig ist, was bei $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ nicht der Fall war. — Vergleichen wir die Zahl 12 als gemeinschaftlichen neuen Nenner mit den frühern Nennern 3 und 4 dieser Brüche, so finden wir, daß 12 das Produkt aus 3 und 4 ist, folglich 3 und 4 auch in dem Produkte 12 ohne Rest enthalten ist. Der gemeinschaftliche neue Nenner für die Brüche $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ wird daher gefunden, wenn man die beiden Nenner der gegebenen Brüche mit einander vervielfacht, nämlich $3 \times 4 = 12$, d. h. beide Brüche können in 12tel verwandelt werden. Aus der Produktenzahl 12 können sodann die Erweiterungszahlen für jeden dieser Brüche gefunden werden, wenn man mit dem Nenner eines jeden Bruches in das gemeinschaftliche Produkt 12 dividirt, weil jeder Nenner in diesem Produkte ohne Rest enthalten ist. $3 : 12 = 4$, und $4 : 12 = 3$. Diese Quotienten 4 und 3 sind nun die Erweiterungszahlen für die gegebenen Brüche, d. i. der Zähler und Nenner des Bruches $\frac{1}{3}$ muß mit 4, und Zähler und Nenner des Bruches $\frac{1}{4}$ muß mit 3 multiplizirt werden. Hier lehrt wieder der Augenschein, daß der Quotient 4 dem Nenner des Bruches $\frac{1}{4}$, und der Quotient 3 dem Nenner des Bruches $\frac{1}{3}$ entspricht.

Weisen wir dieses noch in einem zweiten Beispiele nach! $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{5}$ sollen gleichnamig werden! Wir stellen wieder zuerst die Erweiterung dieser Brüche in Reihen dar und untersuchen dann, mit welchen Erweiterungszahlen der Nenner des einen Bruches mit dem des andern zusammen kommt, d. i. beide Brüche gleichnamig sind:

$$\frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8} \qquad \frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10}$$

$$\frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12} \qquad \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$$

$$\frac{3 \times 4}{4 \times 4} = \frac{12}{16} \qquad \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20}$$

$$\frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$$

Wir sehen hier wieder, daß die Nenner der beiden Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{5}$ in dem Nenner 20 zusammen kommen, welche Zahl dem Produkte der beiden Nenner 4 und 5 entspricht; denn $4 \times 5 = 20$, folglich ist auch wieder 4 und 5 in der Zahl 20 ohne Rest enthalten, und zwar $4 : 20 = 5$mal, und $5 : 20 = 4$mal. Es gilt also auch hier ganz das oben Gesagte.

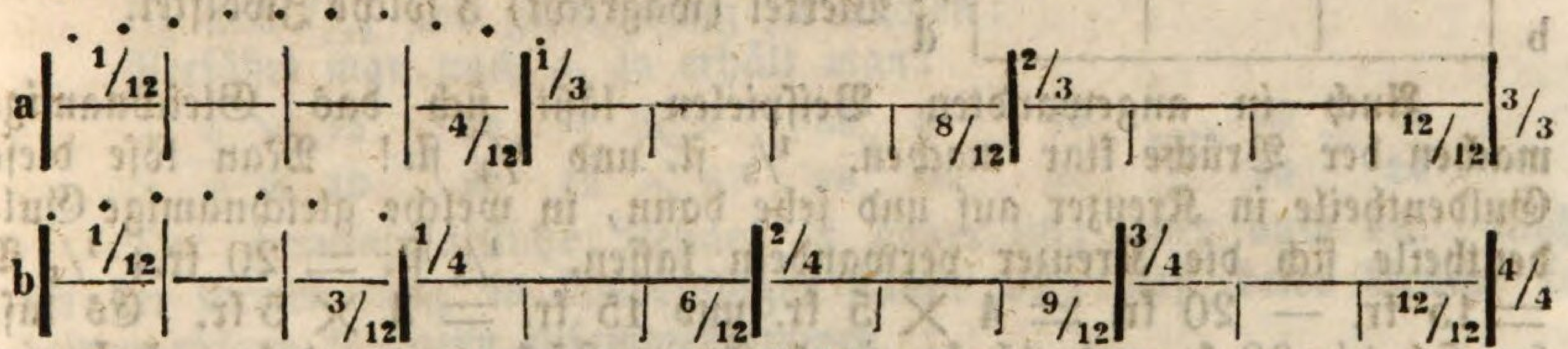
Aus dieser Darstellung folgt: Um zwei gegebene Brüche gleichnamig zu machen, hat man nur nöthig, den Zähler und Nenner jedes Bruches mit dem Nenner des andern Bruches zu vervielfachen; z. B. $\frac{4}{5}$ und $\frac{7}{8}$! $\frac{4 \times 8}{5 \times 8} = \frac{32}{40}$; $\frac{7 \times 5}{8 \times 5} = \frac{35}{40}$. Oder: Man sucht zuerst diejenige Zahl, in welcher die gegebenen Brüche bei ihrer Erweiterung zusammenkommen, in welcher folglich die Nenner ohne Rest aufgehen. Diese Zahl ist jedes Mal das durch Multiplikation der beiden Nenner miteinander gefundene

Produkt. In dieses Produkt dividirt man einzeln mit jedem Nenner, und der dadurch hervorgehende Quotient ist sodann die Erweiterungszahl für denselben Bruch, mit dessen Nenner der Quotient gefunden wurde, d. h. dieser Quotient ist diejenige Zahl, mit der Zähler und Nenner des Bruches multiplizirt werden müssen. Also $^4/_5$ und $^7/_8$!

Diejenige Zahl, in welcher beide Brüche bei der Erweiterung zusammenkommen, ist: $5 \times 8 = 40$. In dieser Zahl 40 sind auch die beiden Nenner 5 und 8 ohne Rest enthalten, denn $5 : 40 = 8$, und $8 : 40 = 5$. Diese beiden durch Division gefundenen Quotienten sind nun die Erweiterungszahlen für die beiden gleichnamig zu machenden Brüche, und zwar 8 für den Bruch $^4/_5$, und 5 für den Bruch $^7/_8$; es ist also auch hier wieder der Zähler und Nenner des Bruches $^4/_5$ mit der Zahl 8, und Zähler und Nenner des Bruches $^7/_8$ mit der Zahl 5 zu vervielfachen, was dasselbe ist, wie bei dem vorigen Verfahren. Das über Gleichnamigmachen zweier Brüche Gesagte läßt sich kurz in folgende Regel zusammenfassen:

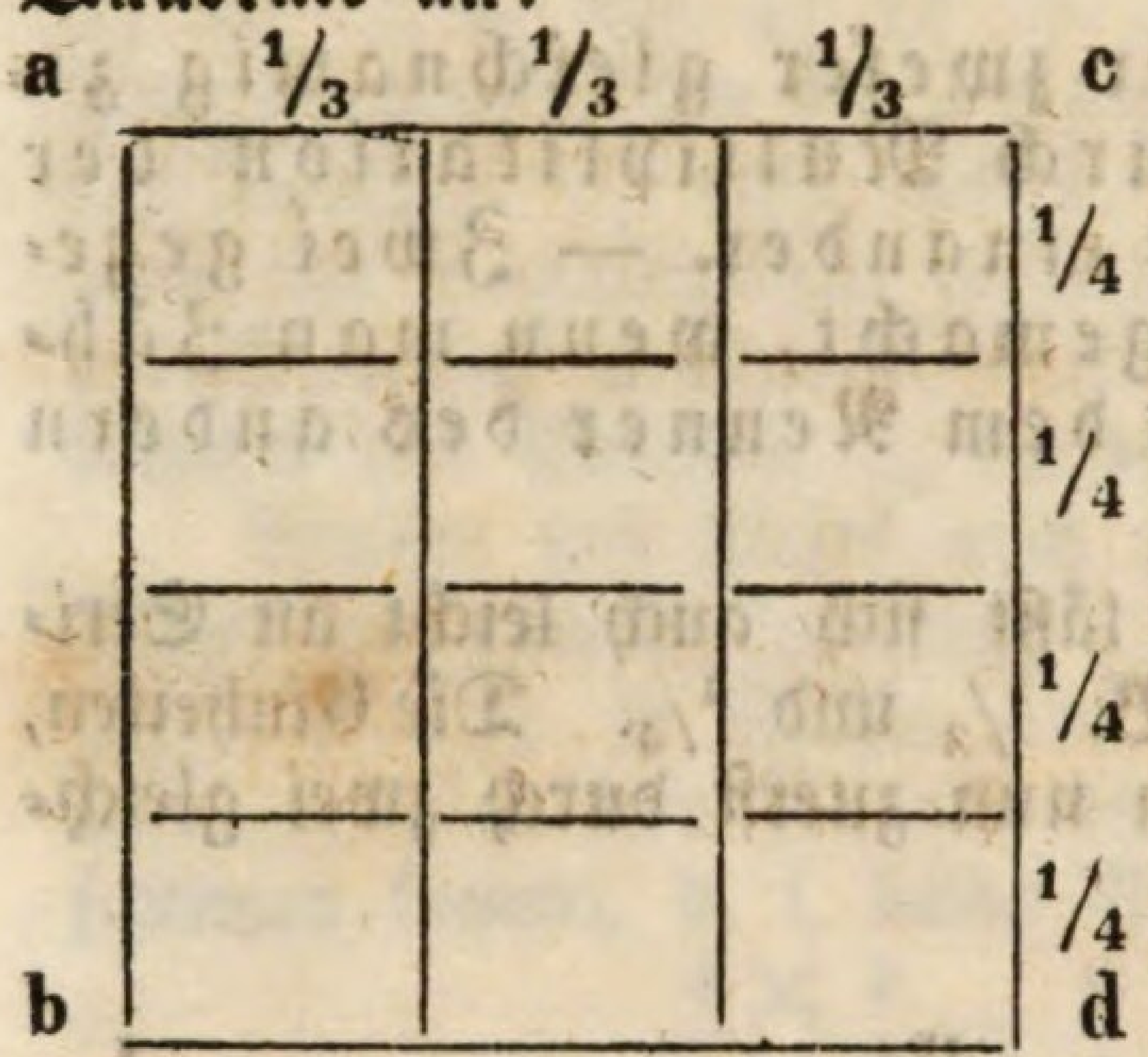
Den gemeinschaftlichen Nenner zweier gleichnamig zu machender Brüche erhält man durch Multiplikation der Nenner der gegebenen Brüche mit einander. — Zwei gegebene Brüche werden gleichnamig gemacht, wenn man Zähler und Nenner jedes Bruches mit dem Nenner des andern Bruches vervielfacht.

Das Gleichnamigmachen der Brüche läßt sich auch leicht an Strichen, Flächen &c. anschaulich machen. Z. B. $^1/_3$ und $^1/_4$. Die Einheiten, von welchen diese Brüche Theile sind, seien nun zuerst durch zwei gleichlange Striche dargestellt, a und b.



Der Strich a wird in 3 und Strich b in 4 gleiche Theile getheilt, wovon jedes Mal nur ein Theil, den Zählern der beiden Nennern gemäß, genommen wird. Um nun sowohl für $^1/_3$ als auch für $^1/_4$ ein und denselben Namen zu erhalten, müssen wir das Drittel und das Viertel in gleich große Theile theilen. Gleich große Theile werden wir erhalten, wenn das Drittel in vier und das Viertel in drei gleiche Theile getheilt wird. Theilt man den ganzen Strich a, (die Einheit für den Bruch $^1/_3$) und so auch den ganzen Strich b, (als Einheit des Bruches $^1/_4$), in eben solche Theile, so erhält man sowol von Strich a, als von Strich b je 12 einander ganz gleich große Theile. Jeder dieser Theile ist also ein Zwölftel des ganzen Striches ($^1/_{12}$ der Einheit), und es ist augenscheinlich, daß beide Brüche in gleichen Theilen dargestellt, also gleichnamig sind und zwar ohne Werthsveränderung. Daher: $^1/_3 = {^4/_{12}}$ und $^1/_4 = {^3/_{12}}$. — Zugleich ist durch diese beiden Striche augenscheinlich der Beweis gegeben, (was auch für alle andere ähnliche Fälle gilt), daß

durch Multiplikation der Nenner mit einander — der gemeinschaftliche oder Hauptnenner gefunden wird; so wie daß durch Vervielfachung des Zählers und des Nenners eines jeden Bruches mit dem Nenner des andern Bruches die gegebenen Brüche ohne Werthsveränderung gleichnamig werden; denn wir sehen, $1/3$ hat 4 solche Theile, wie $1/4$ nur 3 derselben hat. Drei Drittel haben also $3 \times 4 = 12$ und 4 Viertel haben $4 \times 3 =$ ebenfalls 12 solche Theile, von welcher Anzahl der in gleiche Theile getheilten Einheit die Theile selbst ihre Namen erhalten. Die Anzahl der Theile eines Drittels, nämlich 4 Zwölftel, entspricht aber dem Nenner des Bruches $1/4$ und die Anzahl der Theile von einem Viertel, nämlich 3 Zwölftel, entspricht dem Nenner des Bruches $1/3$. Daher läßt sich schon aus dem Nenner des einen Bruches erkennen, in wie viele kleinere Theile ein Theil des gegebenen andern Bruches getheilt werden muß, und umgekehrt, um dieselben gleich großen Theile zu erhalten. Deuten wir diese Anschauungsweise an einem Quadrate an!



Dieses Quadrat ist der Länge nach (a c und b d) in 3 gleiche Theile getheilt, heißen also Drittel; der Höhe nach (a b und c d) ist es in 4 gleiche Theile getheilt und sind demnach Viertel. Die ganze Fläche ist aber durch diese doppelte Theilung in 12 gleiche Theile getheilt, wovon jeder $1/12$ der ganzen Fläche ausmacht und folglich Zwölftel heißen. Jedes Drittel (senkrecht) hat wieder offenbar 4 und jedes Viertel (wagrecht) 3 solche Zwölftel.

Auch in angewandten Beispielen läßt sich das Gleichnamigmachen der Brüche klar machen. $1/3$ fl. und $1/4$ fl.! Man löse diese Guldentheile in Kreuzer auf und sehe dann, in welche gleichnamige Guldentheile sich die Kreuzer verwandeln lassen. $1/3$ fl. $= 20$ kr.; $1/4$ fl. $= 15$ kr. — 20 kr. $= 4 \times 5$ kr. und 15 kr. $= 3 \times 5$ kr. Es lassen sich die 20 kr. und 15 kr. in 5 Kreuzerstücke verwandeln. 5 kr. $= 1/12$ fl.; daher $1/3$ fl. oder 20 kr. $= 4/12$ fl. und $1/4$ fl. oder 15 kr. $= 3/12$ fl. Also auch hier dasselbe.

Da sich die bei dem Gleichnamigmachen der Brüche vorkommenden Fälle immer auf vorstehende Erklärung und Darstellung gründen, so können wir uns bei der Entwickelung derselben in folgenden aufgeführten Fällen kurz fassen.

b) Der kleinere Nenner zweier gegebener Brüche ist in dem größern Nenner ohne Rest enthalten. $2/3$ und $5/6$ sollen gleichnamig gemacht werden!

Verfahren wir nach der aus der vorigen Entwickelung abgeleiteten Regel, so wird Zähler und Nenner des Bruches $2/3$ mit 6 und Zähler und Nenner des Bruches $5/6$ mit 3 multiplizirt.

$$\frac{2 \times 6}{3 \times 6} = \frac{12}{18}. \quad \frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{15}{18}. \quad \text{Also } \frac{2}{3} = \frac{12}{18}, \text{ und } \frac{5}{6} = \frac{15}{18}.$$

Wir erhalten demnach die beiden gleichnamigen Brüche $^{12}/_{18}$ und $^{15}/_{18}$. Es ist aber auch $^{12}/_{18} = {}^{4}/_{6}$ und $^{15}/_{18} = {}^{5}/_{6}$; also ebenfalls gleichnamige Brüche, aber mit kleinern Nennern und zwar mit Nennern, wovon einer schon bei einem gegebenen Bruche vorkommt, nämlich bei dem zweiten Bruche $^{5}/_{6}$. Diese Brüche kommen aber auch schon in 6tel zusammen bei der Erweiterung in Reihen, nämlich:

$\frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$. Der Bruch $^{5}/_{6}$ hat schon den Nenner 6tel. Der größere Nenner (6tel) ist also der gemeinschaftliche oder Hauptnenner für beide Brüche. Dieses kommt daher, weil der kleinere Nenner des Bruches $^{2}/_{3}$ in dem größern Nenner des Bruches $^{5}/_{6}$ ohne Rest enthalten ist. In allen ähnlichen Fällen, d. i. in welchen der kleinere Nenner in dem größern ohne Rest enthalten ist, ist stets der größere Nenner der Hauptnenner. Man hat daher nur zu sehen, wie oft der kleinere Nenner in dem größern enthalten ist, (im gegebenen Falle 3 in 6 = 2mal) und multiplizirt sodann mit dem Quotienten den Zähler und Nenner des Bruches mit dem kleinern Nenner, (im gegebenen Falle $^{2}/_{3}$ mit 2); der Bruch mit dem größern Nenner bleibt unverändert.

Also $^{2}/_{3} \times \frac{2}{2} = {}^{4}/_{6}$, welcher Bruch nun gleichnamig ist mit dem Bruche $^{5}/_{6}$. So auch $^{4}/_{5}$ und $^{7}/_{20}$; $5 : 20 = 4$.

$^{4}/_{5} \times 4 = {}^{16}/_{20}$, also gleichnamig mit $^{7}/_{20}$, u. s. w.

c) Der gemeinschaftliche Nenner liegt in einer Mittelzahl zwischen dem Produkte der beiden Nenner und dem größern Nenner, die durch eigene Ueberlegung gesucht wird.

$^{5}/_{8}$ und $^{7}/_{12}$ sind gleichnamig zu machen:

Verfährt man nach a, so erhält man:

$$\frac{5 \times 12}{8 \times 12} = \frac{60}{96};\quad \frac{7 \times 8}{12 \times 8} = \frac{56}{96};\quad \frac{60}{96} = \frac{15}{24},\ \text{und}\ \frac{56}{96} = \frac{14}{24}.$$

Der gemeinschaftliche Nenner ist daher 96; aber auch 24. Auch bei der Erweiterung in Reihenfolgen finden wir, daß beide Brüche in beiden obigen Nennern zusammenkommen.

$$\frac{5 \times 2}{8 \times 2} = \frac{10}{16} \qquad \frac{7 \times 2}{12 \times 2} = \frac{14}{24}$$

$$\frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24} \qquad \frac{7 \times 3}{12 \times 3} = \frac{21}{36}$$

$$\frac{5 \times 4}{8 \times 4} = \frac{20}{32} \qquad \frac{7 \times 4}{12 \times 4} = \frac{28}{48}$$

u. s. w. u. s. w.

$$\frac{5 \times 12}{8 \times 12} = \frac{60}{96} \qquad \frac{7 \times 8}{12 \times 8} = \frac{56}{96}$$

24 ist aber der bequemere Nenner, als 96, weil jener kleiner, als dieser. Je kleiner der Nenner, desto mehr erleichtert ist das Rechnen.

Daß man in diesem Falle eine kleinere Zahl, als $8 \times 12 = 96$ zum gemeinschaftlichen Nenner wählen konnte, kommt daher, weil die Nenner der gegebenen Brüche, nämlich 8 und 12, in einer kleinern Zahl als 96,

nämlich in 24 ohne Rest enthalten sind. In einer kleinern Zahl, als das Produkt der Nenner der gegebenen Brüche ist, sind solche Nenner immer ohne Rest enthalten, wenn sie Produkte ein und derselben Zahl sind, wie die beiden Nenner 8 und 12; denn jener ist das Produkt von 2mal 4, der Nenner 12 das Produkt von 3mal 4. —

Im gegebenen Falle nimmt man 24, als die kleinste Zahl, in welcher die Nenner 8 und 12 ohne Rest enthalten sind, zum Hauptnenner. 8 ist in 24 3mal, und 12 in 24 2mal enthalten. Man vervielfacht also Nenner und Zähler des Bruches $^5/_8$ mit 3, und Zähler und Nenner des Bruches $^7/_{12}$ mit 2. Wir erhalten so zwei gleichnamige Brüche mit den möglich kleinsten Nennern, nämlich:

$$\frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}, \text{ und } \frac{7 \times 2}{12 \times 2} = \frac{14}{24}$$

Regel. In solchen Fällen hat man also nur selbst die kleinste Zahl zu suchen, in welcher die beiden Nenner rein aufgehen; sieht dann zu, wie oft jeder Nenner in dieser Zahl, als dem gemeinschaftlichen neuen Nenner, enthalten ist, und multiplizirt Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit demjenigen Quotienten, welcher durch dessen Nenner gefunden worden.

B. Drei und mehre gegebene ungleichnamige Brüche sind gleichnamig zu machen.

d) Die kleinern Nenner der gegebenen Brüche sind in dem größten Nenner ohne Rest enthalten.

$^3/_5$, $^5/_8$ und $^{11}/_{24}$ sollen unter einerlei Namen gebracht werden!

Das Verfahren hierbei entspricht dem unter b. — Vergleichen wir die Nenner 3, 8 und 24 mit einander, so finden wir, daß die Nenner 3 und 8 in dem Nenner 24 ohne Rest enthalten sind. Man kann also $^2/_3$ und $^5/_8$ in 24tel verwandeln. Es kann daher der größte Nenner als Hauptnenner beibehalten werden, d. i. $^2/_3$ und $^5/_8$ lassen sich in solche Brüche verwandeln, deren Nenner 24 ist. Dieses geschiebt, wenn wir untersuchen, wie oft 3 und 8 in 24 enthalten sind. 3: 24 = 8mal, und 8: 24 = 3mal. Um nun beide Brüche in 24tel auszudrücken, so hat man nur den Nenner des Bruches $^2/_3$ mit 8, und den Nenner des Bruches $^5/_8$ mit 3 zu multiplizien. Um aber auch den Werth der Brüche unverändert zu erhalten, so müssen auch ihre Zähler mit denselben Zahlen vervielfacht werden also:

$$\frac{2 \times 8}{3 \times 8} = \frac{16}{24}, \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}; \text{ folglich sind } \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{11}{24} = \frac{16}{24}, \frac{15}{24}, \frac{11}{24}.$$

Daraus leiten wir für alle ähnliche Fälle die Regel ab:

Ist unter mehren gleichnamig zu machenden Brüchen ein Bruch vorhanden, in dessen Nenner alle Nenner der übrigen Brüche ohne Rest dividirt werden können; so wird jener als Hauptnenner betrachtet. Man untersucht nun, wie oft die übrigen Nenner in diesem Hauptnenner enthalten sind und multiplizirt Zähler und Nenner jener Brüche mit den gefundenen Quotienten.

e) der gemeinschaftliche Nenner ist in einer Mittelzahl zu suchen.

Bringe $^3/_4$, $^4/_5$, $^5/_6$ $^7/_{10}$ unter gleiche Namen!

Das Verfahren entspricht wieder dem unter c.

Hier hat man wieder eine Zahl zu suchen, in welcher alle 4 Nenner rein aufgehen. Diese Zahl ist sicher das Produkt aus sämmtlichen Nennern, also $4 \times 5 \times 6 \times 10 = 1200$. Vergleichen wir aber die Nenner untereinander, so finden wir, daß sie wieder Produkte ein und derselben Zahl sind, folglich auch in einer kleinern Zahl als 1200 aufgehen. Diese kleinere Zahl ist 60. Man suche nun, wie oft die Nenner 4, 5, 6 und 10 in der Zahl 60 enthalten sind, nämlich 15, 12, 10 und 6mal. Mit diesen gefundenen Quotienten vervielfacht man Zähler und Nenner der Brüche, und zwar $^3/_4$ mit 15, $^4/_5$ mit 12, $^5/_6$ mit 10 und $^7/_{10}$ mit 6, und die sämmtlichen Brüche erhalten einerlei Namen, nämlich:

$$\frac{3 \times 15}{4 \times 15} = \frac{45}{60}, \frac{4 \times 12}{5 \times 12} = \frac{48}{60}, \frac{5 \times 10}{6 \times 10} = \frac{50}{60}, \frac{7 \times 6}{10 \times 6} = \frac{42}{60}.$$

Daraus die Regel:

Sind mehre gegebene Brüche mit verschiedenen Nennern gleichnamig zu machen, gehen aber in dem größten Nenner die kleinern nicht rein auf: so suche man selbst die möglich kleinste Zahl, in welcher alle Nenner ohne Rest aufgehen; diese Zahl ist der gemeinschaftliche Nenner. Man sucht nun, wie oft jeder Nenner in diesem Hauptnenner enthalten ist und multiplizirt Zähler und Nenner jedes Bruches mit demjenigen Quotienten, welcher durch den Nenner desselben Bruches gefunden wurde.

f) Das Produkt sämmtlicher Nenner der gegebenen Brüche ist der gemeinschaftliche oder Hauptnenner.

Die Brüche $^1/_2$, $^2/_3$, $^4/_5$ sollen gleichnamig gemacht werden.

Das Verfahren entspricht dem unter a.

Um diese Brüche gleichnamig zu machen, muß ebenfalls eine Zahl gesucht werden, in welcher alle Nenner ohne Rest enthalten sind. Diese Zahl ist aber keine kleinere, als das Produkt sämmtlicher Nenner, nämlich $2 \times 3 \times 5 = 30$. Man sieht sodann, wie oft 2, 3 und 5 in 30 enthalten ist, nämlich 15mal, 10mal und 6mal, mit welchen Quotienten wieder Zähler und Nenner der entsprechenden Brüche multiplizirt werden, also:

$$\frac{1 \times 15}{2 \times 15} = \frac{15}{30}, \frac{2 \times 10}{3 \times 10} = \frac{20}{30} \text{ und } \frac{4 \times 6}{5 \times 6} = \frac{24}{30}.$$

Regel: Kann für gegebene Brüche keine kleinere Zahl, in welcher die Nenner ohne Rest aufgehen, gefunden werden, als das Produkt sämmtlicher Nenner, so ist dieses der gemeinschaftliche oder Hauptnenner. Man sucht nun ebenfalls, wie oft jeder Nenner in diesem Hauptnenner enthalten ist und vervielfacht Zähler und Nenner jedes Bruches mit dem entsprechenden Quotienten.

Wenn wir die Quotienten 15, 10 und 6, mit welchen Zähler und Nenner der Brüche $^1/_2$, $^2/_3$ und $^4/_5$ vervielfacht werden müssen, vergleichen

mit den Nennern 2, 3, 5 dieser Brüche, so finden wir, daß der Quotient 15 gleich dem Produkte 3 $\times$ 5, 10 gleich dem Produkte 2 $\times$ 5, und der Quotient 6 gleich dem Produkte 2 $\times$ 3 ist. Die beiden Faktoren 3 und 5 entsprechen aber den Nennern der Brüche $^2/_3$ und $^4/_5$, die Faktoren 2 und 5 den Nennern der Brüche $^1/_2$ und $^4/_5$, und die Faktoren 2 und 3 den Nennern der Brüche $^1/_2$ und $^2/_3$. Man wird daher dieselben gleichnamigen Brüche erhalten, wenn man Zähler und Nenner des Bruches $^1/_2$ mit 3 u. 5, Zähler und Nenner des Bruches $^2/_3$ mit 2 u. 5, und Zähler und Nenner des Bruches $^4/_5$ mit 2 u. 3, d. h. den Zähler und Nenner jedes Bruches mit den Nennern oder mit derer Produkt der beiden andern Brüche vervielfacht, nämlich:

$$\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 5} = \frac{15}{30}; \frac{2 \times 2 \times 5}{3 \times 2 \times 5} = \frac{20}{30}; \frac{4 \times 2 \times 3}{5 \times 2 \times 3} = \frac{24}{30}.$$

Daher dann in allen diesen Fällen nach folgender Regel verfahren werden kann:

Der Zähler und Nenner jedes gegebenen Bruches wird mit den Nennern der andern Brüche oder derer Produkt vervielfacht.

Das Gleichnamigmachen der Brüche kann im Allgemeinen auch noch auf folgende Weise begreiflich gemacht werden.

Es seien die Brüche $^3/_4$, $^5/_6$, $^7/_9$ unter gleiche Benennung zu bringen!

Wir müssen nun vor Allem einen gemeinschaftlichen Nenner suchen. Dieser gemeinschaftliche Nenner ist diejenige Zahl, welche angibt, in wie viele solche gleiche kleinere Theile die Einheit getheilt werden muß, daß dieselben sich sowol auf die 4tel, als auch auf die 6tel und 9tel vertheilen lassen.

Auf wasfür verschiedene Wege diese Zahl gefunden wird, haben wir oben gesehen. Für vorstehende Brüche ist der kleinste Hauptnenner 36, d. h. die Einheit muß in 36 Theile zerlegt gedacht werden, woher diese kleinern Theile den Namen 36tel erhalten. Wir schließen nun so: da das Ganze oder die Einheit 36 neue Theile hat, so trifft es auf 1 Viertel, als den 4ten Theil der Einheit oder des Ganzen, auch nur den vierten Theil von jenen 36 neuen Theilen, d. i. 9 solche Theile, und auf 3 Viertel 3 $\times$ 9 = 27 neue Theile; auf 1 Sechstel kommt daher nur der 6te Theil von 36 neuen Theilen, d. i. 6 solche Theile, und auf 5 Sechstel 5 $\times$ 6 = 30 neue Theile; auf 1 Neuntel kann es sodann auch nur den 9ten Theil von 36 neuen Theilen treffen, d. i. 4 solche Theile, und auf 7 Neuntel also 7 $\times$ 4 = 28 neue Theile. Es sind daher: $^3/_4 = {}^{27}/_{36}$, $^5/_6 = {}^{30}/_{36}$ u. $^7/_9 = {}^{28}/_{36}$.

Es verhält sich demnach das Gleichnamigmachen der Brüche, wie das Auflösen übergeordneter Größenganze in untergeordnete Größen, z. B. Ztr. in ℔ und Loth.

Bei Brüchen kann auch die Einheit als die übergeordnete Größe, und die Theile, in welche dieselbe zerlegt gedacht werden muß, als die untergeordnete Größe betrachtet werden. Wie aber z. B. Pfund dem Zentner untergeordnet wieder übergeordnete Größe zu Loth ist, so ist gleichsam auch jeder Bruch übergeordnete Größe zu kleinern Theilen, als er selbst solche Theile enthält oder durch seinen Nenner andeutet. Jeder seiner Theile, die er durch seinen Zähler ausdrückt, enthält daher eine bestimmte Anzahl

kleinerer Theile, welche Anzahl durch Division seines Nenners in die ganze Anzahl der der Einheit untergeordneten kleinern Theile gefunden wird, d. h. durch Division in diejenige Zahl, welche angibt, in wie viele kleinere Theile die Einheit getheilt ist.

Um also mehre Brüche unter einen Namen zu bringen, hat man zuerst den allgemeinen oder Hauptnenner zu suchen, d. i. zu suchen, in wie viele gleiche kleinere Theile das Ganze oder die Einheit getheilt werden kann. Hierauf sucht man, wie viele der neuen kleinern Theile auf einen Theil jedes der gegebenen Brüche kommt, und nimmt die Anzahl dieser kleinern Theile so oftmal, als der betreffende Bruch Theile hat, d. h. so oftmal, als der Zähler des Bruches Einheiten hat, wie wir in obigem Beispiele gesehen haben. Das Ganze läßt sich in folgende kurze Regel zusammenfassen:

Man suche zuerst den Hauptnenner durch Multiplikation sämmtlicher Nenner, dividire sodann mit jedem Nenner des gegebenen Bruches in den Hauptnenner und vervielfache mit den gefundenen Quotienten die Zähler der betreffenden Brüche. Diese gefundenen Produkte sind die Zähler, und der Hauptnenner ist der Nenner für jeden nun gleichnamigen Bruch.

Daß sich für die mündlichen Uebungen nur Beispiele mit kleinen Zahlen eignen, versteht sich wol von selbst.

Aufgaben.

1. Verwandelt folgende Brüche in gleichnamige:
   a) 1/2 u. 1/3, 1/2 u. 1/4, 1/2 u. 1/5 u. s. w. bis 1/2 u. 1/10.
   b) 1/3 u. 1/4, 1/3 u. 1/5, 1/3 u. 1/6 u. s. w. bis 1/3 u. 1/10.
   c) 1/4 u. 1/5, 1/4 u. 1/6, 1/4 u. 1/7 u. s. w. bis 1/4 u. 1/10.
   d) 1/2 u. 2/3, 1/2 u. 3/4, 1/2 u. 4/5 u. s. w. bis 1/2 u. 9/10.
   e) 1/3 u. 3/4, 2/3 u. 4/5, 2/3 u. 5/6 ꝛc. 1/4 u. 2/5, 1/4 u. 3/5 ꝛc.
2. Wie heißen folgende Brüche unter einerlei Namen?
   a. 3/4 u. 5/8, 4/5 u. 7/10, 5/6 u. 11/12, 3/7 u. 11/14 ꝛc.
   b) 1/2 u. 3/4, 2/3 u. 5/9, 1/4 u. 7/12, 3/5 u. 4/15, 5/6 u. 7/24 ꝛc.
   c) Verwandle Halbe in 4tel, 6tel, 8tel, 10tel ꝛc.
   " Drittel in 6tel, 9tel, 12tel, 15tel ꝛc
   " Viertel in 8tel, 12tel, 16tel, 20tel ꝛc.
   (Brüche, deren Nenner in dem größern ohne Rest rein enthalten sind.)
3. Mache folgende Brüche gleichnamig!
   a) 3/4 u. 1/6, 4/6 u. 7/8, 7/9 u. 7/12, 1/4 u. 5/6, 7/8 u. 3/10, 9/10 u. 11/12, 13/15 u. 17/20, 7/12 u. 13/16 ꝛc.
   (Brüche für welche der Hauptnenner in einer Mittelzahl liegt).
4. Bringe je 3 der folgenden Brüche unter gleiche Benennung!
   a) 1/2, 1/3, 1/4; 1/3, 1/4, 1/5; 1/4, 1/5, 1/6 ꝛc.
   b) 1/2, 2/3, 3/4; 1/3, 3/4, 4/5; 2/3, 3/4, 4/5; 3/4, 4/5, 5/6 ꝛc.

5. Nennet zwei Brüche, deren kleinster Hauptnenner das Produkt beider Nenner ist! Ebenso drei Brüche!

6. Gebt zwei Brüche an, von welchen der kleinere Nenner in dem größern ohne Rest enthalten ist, und machet diese Brüche dann gleichnamig!

7. Suchet Brüche, deren Nenner in einer Mittelzahl ohne Rest enthalten ist! und wie heißen dann diese Brüche unter gleichem Namen?

8. Um wie viel ist jeder der folgenden Brüche größer oder kleiner, als der vorhergehende? 1/2, 2/3, 3/4, 7/8, 5/6, 3/10, 4/9 3/5, 6/7, 11/12.

9. Folgende benannte Brüche sind gleichnamig zu machen: a) 4/5 fl. u. 7/8 fl.; b) 5/6 Schfl. u. 7/10 Schfl.; c) 4/5 Ztr., 1/3 Ztr. u. 5/6 Ztr.; d) 5/8 Ell., 3/4 Ell. u. 13/16 Ell.; e) 5/4 Eim., 2/3 Eim. u. 7/10 Eim.

Schriftliche Darstellungsweise
der bisherigen mündlichen Vorübungen im Rechnen mit Bruchzahlen oder Brüchen.

Da wir das Wesentlichste über die Eigenschaften und die Behandlung der Brüche in mündlicher und anschaulicher Weise abgehandelt haben, so lassen wir noch, ehe wir zu den vier Grundrechnungsarten übergehen, die schriftliche Darstellungsweise nach dem Stufengange der mündlichen Uebungen folgen.

Es bedarf wol kaum der Erwähnung, daß der Gebrauch der Ziffern bei den bisherigen mündlichen Uebungen nur der bequemern und kürzern Darstellung wegen in Anwendung gekommen sind, und folglich die Zahlzeichen oder Ziffern erst bei der schriftlichen Darstellung den Schülern vor Augen geführt werden sollen. Uebrigens bleibt es dem Ermessen des Lehrers anheimgestellt, entweder alle bisherigen Uebungen vorab mündlich zum klaren Verständniß der Schüler zu bringen, und sodann erst die Behandlungsweise mit Ziffern schriftlich vorzunehmen, wie wir gethan; oder jeder einzelnen mündlichen Uebung gleich die schriftliche Darstellung folgen zu lassen. Es sei also hiermit nochmal ausdrücklich erwähnt, daß jeder schriftlichen Darstellung die mündliche Uebung vorausgehen muß.

1. Schriftliche Darstellungsweise eines Bruches durch Ziffern.

Die Entstehung der Brüche und die Benennung der Bruchglieder ist aus den mündlichen Uebungen Ziff. 1 und 2 bekannt. Bei der schriftlichen Darstellung eines Bruches werden die Glieder, Zähler und Nenner, desselben unter einander geschrieben, so, daß der Zähler über den Nenner zu stehen kommt, und beide werden durch einen kleinen wagrechten, oder schrägen Strich getrennt. Z. B.

$\frac{3}{4}$, $\frac{5}{17}$, $\frac{13}{20}$; oder: $^3/_4$, $^5/_{17}$, $^{13}/_{20}$.

Eben so wissen wir auch aus den mündlichen Uebungen, daß beim Ablesen der Brüche immer der Zähler zuerst — und dann der Nenner ausgesprochen wird, indem man dem Grundzahlwort des Nenners die Silbe tel oder stel anhängt, und zwar die letztere Silbe dann, wenn sich das Grundzahlwort mit zig oder ßig endigt; z. B. sieben — Siebentel, zwanzig — Zwanzigstel, dreißig — Dreißigstel.

2. Arten der Brüche in schriftlicher Darstellung durch Ziffern.

In Ziffer 3 (S. 11 ff.) der mündlichen Uebungen haben wir die verschiedenen Arten der Brüche kennen gelernt. Ihre Darstellung in Ziffern ist auf Seite 14 ersichtlich.

Der Lehrer übe seine Schüler fleißig im richtigen Anschreiben der Brüche und namentlich der gemischten Zahlen. Zu diesem Behufe diktire er viele Brüche und besonders viele gemischte Zahlen, wobei er streng darauf halte, daß bei letzteren die Ganzen weder zu hoch, noch zu tief gesetzt werden, was Beides gefehlt wäre und leicht zu Irrungen führen könnte. Auch ist es sehr vortheilhaft und das schnelle Auffassen

einer gemischten Zahl fördernd, wenn die Ganzen mit etwas größern, Zähler und Nenner des damit verbundenen Bruches mit kleinern Ziffern anzuschreiben geübt wird. Also z. B.: $3\frac{5}{8}$ oder $3^5/_8$, und nicht: $^3\frac{5}{8}$, oder $_3\frac{5}{8}$, oder $^{35}/_8$, oder $_3{}^5/_8$.

3. Schriftliche Darstellung über das Bilden uneigentlicher, ächter und unächter Brüche aus ganzen und gemischten Zahlen.

(Man sehe mündliche Uebungen Ziff. 4. S. 15 ff.)

a) Schriftliches Verfahren, ganze Zahlen in Brüche zu verwandeln durch Division.

Bei den mündlichen Uebungen ist gezeigt worden, daß jeder Bruch als Quotient einer zu vollendenden oder vollendeten Division angesehen werden kann, dessen Zähler Dividend und dessen Nenner Divisor ist. Z. B. $7 : 5 = {}^5/_7$; $5 : 7 = {}^7/_5$; $5 : 5 = {}^5/_5$; $7 : 21 = {}^{21}/_7$ ꝛc.

Brüche entstehen also auch, wenn mit einer ganzen Zahl in eine ganze Zahl dividirt wird, und zwar:

aa) ächte Brüche, wenn mit einer größern Zahl in eine kleinere dividirt wird. Z. B. $9 : 6 = {}^6/_9$; $15 : 8 = {}^8/_{15}$; $27 : 12 = {}^{12}/_{27}$;

bb) unächte Brüche, wenn mit einer kleinern Zahl in eine größere dividirt wird. Z. B. $6 : 9 = {}^9/_6$; $8 : 15 = {}^{15}/_8$; $12 : 27 = {}^{27}/_{12}$;

cc) uneigentliche Brüche, wenn mit einer Zahl in eine gleich große, oder in eine um das Vielfach so große dividirt, die Division aber nur in Bruchform angezeigt wird. Z. B. $5 : 5 = {}^5/_5$; $8 : 16 = {}^{16}/_8$; $15 : 75 = {}^{75}/_{15}$ ꝛc.

Erklärung. Diejenige Zahl, welche dividirt werden soll (der Dividend), wird als Zähler, und diejenige, mit welcher dividirt wird (der Divisor), wird als Nenner angeschrieben.

b) Schriftliches Verfahren, ganze Zahlen in (uneigentliche) Brüche zu verwandeln.

(Auflösen ganzer Zahlen.)

1) Verwandle 36 in 8tel!

Berechnung:

```
 36
  8
288
```

Also: $\frac{288}{8}$.

Erklärung. 36 ist die ganze Zahl, welche mit der Zahl des verlangten Nenners multiplizirt werden muß, weil 1 Ganzes 8 Achtel hat; also: $36 = 36 \times \frac{8}{8} = \frac{288}{8}$.

Die ganze Zahl ist daher Multiplikand und der Nenner des Bruches der Multiplikator; das Produkt erhält den verlangten Nenner zum Nenner.

2) 756 Schäffel sind wie viele 6tel Schäffel?

Berechnung:

```
 756
   6
4536
```

Also: 756 Schfl. $= \frac{4536}{6}$ Schfl. = 4536 Metz.

3) 3071 Ztr. sind wie viele 48tel Ztr?

Berechnung:

```
  3071
    48
 24568
12284
147408
```

Also: 3071 Ztr. $= \frac{147408}{48}$ Ztr.

c) Schriftliches Verfahren, gemischte Zahlen in (unächte) Brüche zu verwandeln.

(Auflösen oder Einrichten gemischter Zahlen.)

1) Die gemischte Zahl $438^2/_5$ soll in 5tel aufgelös't werden!

Berechnung:

$$\begin{array}{r} 438^2/_5 \\ 5 \\ \hline 2190 \\ +\ 2 \\ \hline 2192 \end{array}$$

Also $438^2/_5 = \frac{2192}{5}$.

Erklärung. Ein Ganzes hat 5 Fünftel; 438 Ganze also 438 $\times$ 5 Fünftel = 2190 Fünftel und noch die zwei Fünftel dazu, geben 2192 Fünftel. Um also 438 in 5tel zu verwandeln, multiplizirt man die 438 mit 5, zählt noch die 2, den Zähler des damit verbundenen Bruches zum Produkte, und gibt diesem den Nenner 5 des Bruches zum Nenner.

2) $1497^{329}/_{568}$ soll eingerichtet (aufgelös't oder in 568tel verwandelt) werden!

Berechnung:

$$\begin{array}{r} 1497 \\ 568 \\ \hline 11976 \\ 8982 \\ 7485 \\ \hline 850296 \\ +\ 329 \\ \hline 850625 \end{array}$$

Also: $1497^{329}/_{568} = \frac{850625}{568}$.

Erklärung. Die Ganzen, nämlich 1497, schreibt man als Multiplikand, den Nenner 568 des damit verbundenen Bruches nimmt man zum Multiplikator und vervielfacht; zu dem Produkte addirt man noch den Zähler 329 des Bruches und schreibt dieser Zahl den Nenner 568 unter.

Kürze halber schreibt man gewöhnlich den Multiplikator nicht besonders unter, sondern zieht gleich unter der gemischten Zahl einen wagrechten Strich, zählt auch gleich die Zählerstellen zu dem Produkte aus der Multiplikation mit der Einheitsstelle des Faktors und gibt diesem Produkte den Nenner des mit den Ganzen verbundenen Bruches zum Nenner. Z. B.

a) $$\begin{array}{c} 438^2/_5 \\ \hline 2192 \\ \hline 5 \end{array}$$ oder $438^2/_5 = \frac{2192}{5}$. Also ebenfalls $438^2/_5 = \frac{2192}{5}$.

b) $$\begin{array}{r} 1497^{329}/_{568} \\ \hline 12305 \\ 8982 \\ 7485 \\ \hline 850625 \\ \hline 568 \end{array}$$ oder auch: $1497^{329}/_{568} = \left\{\begin{array}{r} 12305 \\ 8982 \\ 7485 \\ \hline 850625 \\ \hline 568 \end{array}\right.$

Also ebenfalls: $1497^{329}/_{568} = \frac{850625}{568}$.

4. Schriftliche Darstellungsweise über das Verwandeln uneigentlicher und unächter Brüche in Ganze.

(Zurückführen oder Reduciren.)

(Siehe mündliche Uebungen Ziff. 5. S. 18.)

1) $\frac{348}{6}$ sind wie viele Ganze?

Berechnung:

```
6 | 348 | 58
    30
    --
    -48
     48
    --
     --
```

Also: $\frac{348}{6} = 58.$

Erklärung. Zu einem Ganzen braucht man 6 Sechstel, d. i. $^6/_6 = 1$. — So oft nun $^6/_6$ vorhanden sind, eben so viele Ganze sind es. Man hat also zu untersuchen, wie oft $^6/_6$ in $^{348}/_6$ enthalten sind, was gefunden wird, wenn man mit 6 in 348 dividirt. Man schreibt daher den Zähler des gegebenen Bruches als Dividend und den Nenner als Divisor an; der durch die Division gefundene Quotient gibt die Anzahl der Ganzen an. Bleibt ein Rest, so gibt man diesem Reste den Nenner des gegebenen Bruches zum Nenner und verbindet diesen Bruch mit den Ganzen als gemischte Zahl. Z. B.

2) $\frac{1768}{15}$ sollen zurückgeführt (reducirt) werden!

Berechnung:

```
15: 1768 = 117
    15
    --
    -26
     15
    ---
     118
     105
    ---
    -13 Rest.
```

Also: $\frac{1768}{15} = 117$ Ganze mit dem Reste $\frac{13}{15}$,

daher: $\frac{1768}{15} = 117^{13}/_{15}$.

5. Schriftliche Bezeichnung bei Vergleichung der Brüche unter einander.

(Siehe mündliche Uebungen Ziff. 6. S. 20.)

Die schriftliche Bezeichnung bei Vergleichung eines Bruches mit einem andern hinsichtlich ihrer beiderseitigen Größe oder ihres Werthes wird durch einen liegenden spitzen Winkel dargestellt, und zwar so, daß die Oeffnung des Winkels gegen den Bruch von größerm Werthe, und die Spitze des Winkels gegen jenen Bruch von geringerm Werthe gerichtet ist. Also:

$^1/_3 > {}^1/_4$; $^5/_6 > {}^3/_4$; $^{17}/_{24} > {}^9/_{20}$; — $^1/_8 < {}^1/_5$; $^4/_7 < {}^8/_9$; $^{13}/_{16} < {}^{27}/_{30}$ ꝛc.

6. Schriftliche Darstellungsweise der möglichen Veränderungen, die mit einem Bruche vorgenommen werden können.

(Siehe mündliche Uebungen Ziff. 7. S. 24. ff.)

A. Das Zerfällen eines Bruches ist aus den mündlichen Uebungen Ziff. 7 A. klar. Für das schriftliche Verfahren eignen sich schon größere Brüche.

Zerfället den Bruch $^{48}/_{72}$ a) in 3, 4, 6 ꝛc. gleiche, b) in 2, 5, 8 ꝛc. ungleiche Theile!

Bearbeitung.

a) $^{48}/_{72} = {}^{16}/_{72} + {}^{16}/_{72} + {}^{16}/_{72}$; $^{48}/_{72} = {}^{12}/_{72} + {}^{12}/_{72} + {}^{12}/_{72} + {}^{12}/_{72}$; $^{48}/_{72} = {}^8/_{72} + {}^8/_{72} + {}^8/_{72} + {}^8/_{72} + {}^8/_{72} + {}^8/_{72}$. — b) $^{48}/_{72} = {}^{36}/_{72} + {}^{12}/_{72}$; $^{48}/_{72} = {}^{18}/_{72} + {}^{12}/_{72} + {}^8/_{72} + {}^6/_{72} + {}^4/_{72}$; $^{48}/_{72} = {}^{12}/_{72} + {}^9/_{72} + {}^8/_{72} + {}^6/_{72} + {}^5/_{72} + {}^4/_{72} + {}^3/_{72} + {}^1/_{72}$. —

B. Die Veränderung eines Bruches durch Multiplikation des Zählers desselben mit einer ganzen Zahl ist eigentliche Multiplikation.

Beispiele: a) $\frac{2}{9} \times 4 = \frac{8}{9}$; b) $\frac{4}{5} \times 9 = \frac{36}{5}$; c) $\frac{7}{8} \times 32 = \frac{224}{8}$ ꝛc.

Die Zähler werden um eben so vielmal so groß, als der Multiplikator Einheiten hat, daher ist jetzt der Werth des Bruches, weil die Theile oder der Werth der einzelnen Theile derselbe bleibt, auch um so viemal so groß.

Entstehen durch Multiplikation des Zählers unächte oder uneigentliche Brüche, so können noch die Ganzen herausgezogen werden.

Z. B. ad b) $^{36}/_{5} = 7^{1}/_{5}$; ad c) $^{224}/_{8} = 28$.

C. Die Veränderung eines Bruches durch Division des Zählers desselben mit einer ganzen Zahl ist eigentliche Division — Theilen oder Enthaltensein.

Beispiele: a) $\frac{3:9}{16} = \frac{3}{16}$; b) $\frac{7:28}{45} = \frac{4}{45}$; c) $\frac{18:162}{276} = \frac{9}{276}$ ꝛc.

Da die Theile dieselben bleiben, so wird der Werth der Brüche um eben so vielmal so klein, als der Divisor Einheiten hat.

Noch ist zu merken, daß für diese Fälle der Veränderung eines Bruches nur Brüche gewählt werden sollen, deren Zähler durch eine ganze Zahl ohne Rest dividirt werden können.

D. Die Veränderung eines Bruches durch Multiplikation seines Nenners mit einer ganzen Zahl ist Division durch Multiplikation.

Beispiele. a) $\frac{2}{3 \times 4} = \frac{2}{12}$; b) $\frac{7}{10 \times 5} = \frac{7}{50}$; c) $\frac{13}{25 \times 6} = \frac{13}{150}$ ꝛc.

Die Nenner sind zwar, bei jedesmaligem unverändertem Zähler, so oftmal so groß geworden, als der Multiplikator Einheiten hat; der Werth der Brüche ist aber eben so vielmal so klein geworden, weil, in je mehr Theile das Ganze getheilt wird, die Theile desto kleiner werden und damit ihr Werth, folglich desto kleiner der Werth des Bruches selbst.

E. Die Veränderung eines Bruches durch Division seines Nenners mit einer ganzen Zahl ist Multiplikation durch Division.

Beispiele. a) $\frac{3}{2:8} = \frac{3}{4}$; b) $\frac{17}{5:25} = \frac{17}{5}$; c) $\frac{56}{12:84} = \frac{56}{7}$ ꝛc.

Die Nenner sind jedes Mal um so vielmal so klein geworden, als je der Divisor Einheiten hat; daher ist der Werth der Brüche, weil die Zähler sich gleich blieben, um eben so vielmal so groß geworden.

Entstehen unächte oder uneigentliche Brüche, so kann man wieder die Ganzen ausziehen; also:

ad b) $^{17}/_{5} = 3^{2}/_{5}$; ad c) $^{56}/_{7} = 8$.

Hierbei ist ebenfalls zu berücksichtigen, daß nur solche Brüche gewählt werden, deren Nenner sich ohne Rest mit einer ganzen Zahl theilen lassen.

7. Schriftliche Darstellung über das Erweitern der Brüche.

(Siehe mündliche Uebungen Ziff. 7. F S. 31, Veränderung eines Bruches durch Multiplikation seines Zählers und Nenners.)

a) Die Erweiterungszahl ist geradezu gegeben. Das schriftliche Verfahren erhellet aus folgender Darstellungsweise:

1) Erweitere den Bruch $^7/_8$ durch 5!

Berechnung: $\frac{7 \times 5}{8 \times 5} = \frac{35}{40}$.

2) Erweitere $^{93}/_{146}$ durch 8!

Berechnung: $\frac{93 \times 8}{146 \times 8} = \frac{744}{1168}$.

3) Erweitere den Bruch $^{275}/_{506}$ durch 27!

Berechnung:

275 (der Zähler.)	506 (der Nenner.)	Also:
27	27	
1925	3542	$^{275}/_{506} = {}^{7425}/_{13652}$.
550	1012	
7425 (der neue Zähler.)	13652 (der neue Nenner.)	

Erklärung. Im ersten und zweiten Beispiele sind die Erweiterungszahlen, weil sie nur einstellig sind, gleich als Multiplikatoren neben Zähler und Nenner der Brüche gesetzt und dieselben vervielfacht worden. Im dritten Beispiele wurden Zähler und Nenner des Bruches, wegen der Mehrstelligkeit der Faktoren, besonders herausgeschrieben und die Multiplikation ausgeführt.

b) Die Erweiterungszahl ist versteckt gegeben.

1) Verwandle $^4/_5$ in 40tel!

aa) Die Erweiterungszahl wird diejenige sein, die mit dem Nenner 5 des gegebenen Bruches vervielfacht 40 zum Produkte hat. Diese unbekannte Zahl wird gefunden, wenn man mit dem Nenner 5 in die Zahl des verlangten neuen Nenners dividirt; also:

Berechnung ad aa) 5 : 40 = 8 (die Erweiterungszahl);

daher: $\frac{4}{5} \times \frac{8}{8} = \frac{32}{40}$.

Erklärung: 5 ist in 40 8mal enthalten, d. h. 8 ist die Zahl, mit der Zähler und Nenner des Bruches $^4/_5$ vervielfacht werden muß. — Oder:

bb) So oftmal so groß die Zahl des neuen Nenners ist, als der Nenner des gegebenen Bruches, eben so oftmal so groß muß auch der Zähler des gegebenen Bruches gemacht werden; daher:

ad bb) 5 : 40 = 8. (Zähler.) 4
8
32

Also: $^4/_5 = {}^{32}/_{40}$.

Erklärung. 5 ist in 40 8mal enthalten, d. h. 40 ist 8mal so groß als 5; es muß daher auch der Zähler des Bruches mit 8 vervielfacht werden, nämlich 4 × 8 = 32, und diese Zahl 32 ist der Zähler für den verlangten Bruch.

2) Verwandle $^{37}/_{48}$ in 576tel!

Berechnung nach aa) 48 : 576 = 12 ist die Erweiterungszahl.

37 (der Zähler.)	48 (der Nenner.)	Also:
12	12	
74	96	$^{37}/_{48} = {}^{444}/_{576}$.
37	48	
444 (der neue Zähler.)	576 (der neue Nenner.)	

Oder nach bb) 48: 576 = 12. 37 (der Zähler.)

$$\begin{array}{r} 37 \\ 12 \\ \hline 74 \\ 37 \\ \hline 444 \end{array}$$

Also ebenfalls: $^{444}/_{576}$.

Anstatt zuerst mit dem Nenner des gegebenen Bruches in den Nenner des verlangten Bruches zu dividiren und mit dem dadurch gefundenen Quotienten den Zähler des gegebenen Bruches zu multiplíziren, wie bei dem 1. und 2. Beispiele ad bb geschehen, kann man auch zuerst den Zähler des gegebenen Bruches mit dem verlangten Nenner multiplíziren und das erhaltene Produkt mit dem Nenner des zu erweiternden Bruches dividiren; der Quotient ist der gefundene Zähler für den neuen Bruch; nämlich:

1. Beispiel: 40 (Nenner des verlangten Bruches.)
4 (Zähler des gegebenen Bruches.)

(Nenner des gegebenen Bruches.) 5 : 160 = 32 (Zähler des neuen Bruches.)

$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline -10 \\ 10 \\ \hline -- \end{array}$$

Also: $^4/_5 = {}^{32}/_{40}$.

2. Beispiel: 576 (Nenner des verlangten Bruches.)
37 (Zähler des zu erweiternden Bruches.)

$$\begin{array}{r} 4032 \\ 1728 \end{array}$$

(Nenner des gegebenen Bruches.) 48 : 21312 = 444 (Zähler des erweiterten Bruches.)

$$\begin{array}{r} 192 \\ \hline -211 \\ 192 \\ \hline -192 \\ 192 \\ \hline --- \end{array}$$

Also: $^{444}/_{576}$.

8. Schriftliche Darstellungsweise über das Kürzen, Zurückführen oder Heben der Brüche.

Aus den mündlichen Uebungen, Ziff. 7. G S. 36, haben wir Folgendes gelernt:

Kürzen, Zurückführen oder Aufheben der Brüche nennt man es, wenn der Zähler und Nenner eines Bruches durch ein und dieselbe Zahl dividirt wird. Ferner: Alle Brüche, welche durch Vervielfachung des Zählers und Nenners mit ein und derselben ganzen Zahl entstanden sind oder als daraus entstanden gedacht werden können, lassen sich mit derselben Zahl oder auch mit den Faktoren dieser Zahl kürzen, denn solche Zahlen sind im Zähler und Nenner ohne Rest enthalten. Ist die Kürzungszahl (der Divisor) unbekannt, so muß dieselbe erst gesucht werden, d. h. also, man suche eine Zahl, die im Zähler und Nenner ohne

Rest enthalten ist, und dividire mit dieser den Zähler und Renner des gegebenen Bruches; das Ergebniß ist sodann der gekürzte Bruch ohne Werthsveränderung.

Das schriftliche Verfahren hiebei ist aus Folgendem ersichtlich.

1. Aufgabe. Kürze den Bruch $^{16}/_{20}$ mit der Zahl 4!

$$\frac{16}{20}\overset{4}{\Big|}\frac{4}{5}.$$

Man setzt den Bruch an, zieht rechts einen senkrechten Strich und schreibt über diesen die Kürzungszahl, mit welcher in den Zähler und Renner dieses Bruches dividirt wird. Die Quotienten werden in Bruchform nebenan geschrieben.

2. Aufgabe. Verwandle $^{24}/_{30}$ in 5tel.

Hier muß zuerst die Kürzungszahl gesucht werden. Dieselbe wird gefunden, wenn man mit der Zahl des neuen Renners in den Renner des gegebenen Bruches dividirt; der Quotient ist die Kürzungszahl. Also für das vorstehende Beispiel:

5 : 30 = 6, d. h. 6 Dreißigstel machen 1 Fünftel und 24 Dreißigstel geben sonach 4 Fünftel. Der Bruch $^{24}/_{30}$ muß daher mit 6 gekürzt werden, um 5tel zu bekommen. Also: $\frac{24}{30}\overset{6}{\Big|}\frac{4}{5}$

3. Aufgabe. Hebe $^{3}/_{6}$, $^{4}/_{12}$, $^{12}/_{48}$!

In diesen Beispielen ist immer der Zähler in dem Renner ohne Rest enthalten; daher ist jeder Zähler auch zugleich die Kürzungszahl für Zähler und Renner des betreffenden Bruches.

Also: $\frac{3}{6}\overset{3}{\Big|}\frac{1}{2}$; $\frac{4}{12}\overset{4}{\Big|}\frac{1}{3}$; $\frac{12}{48}\overset{12}{\Big|}\frac{1}{4}$.

4. Aufgabe. Führe zurück $^{72}/_{96}$!

Hier muß man eine Zahl suchen, durch welche 72 und 96 ohne Rest dividirt werden können. Solche Zahlen gibt es mehre; denn in 72 und 96 sind 2, 3, 4, 6, 8, 12 und 24 rein enthalten. Daher läßt sich der Bruch $^{72}/_{96}$ auf mehrfache, und zwar auf siebenfache Weise kürzen oder zurückführen, nämlich:

$\frac{72}{96}\overset{2}{\Big|}\frac{36}{48}$, oder: $\frac{72}{96}\overset{3}{\Big|}\frac{24}{32}$, oder: $\frac{72}{96}\overset{4}{\Big|}\frac{18}{24}$, oder: $\frac{72}{96}\overset{6}{\Big|}\frac{12}{16}$, oder: $\frac{72}{96}\overset{8}{\Big|}\frac{9}{12}$,

oder: $\frac{72}{96}\overset{12}{\Big|}\frac{6}{8}$, oder: $\frac{72}{96}\overset{24}{\Big|}\frac{3}{4}$.

Bei den ersten 6 gekürzten Brüchen läßt sich das Kürzen noch weiter fortsetzen, als:

$\frac{72}{96}\overset{2}{\Big|}\frac{36}{48}\overset{2}{\Big|}\frac{18}{24}\overset{2}{\Big|}\frac{9}{12}\overset{3}{\Big|}\frac{3}{4}$; oder: $\frac{72}{96}\overset{2}{\Big|}\frac{36}{48}\overset{3}{\Big|}\frac{12}{16}\overset{4}{\Big|}\frac{3}{4}$; oder: $\frac{72}{96}\overset{3}{\Big|}\frac{24}{32}\overset{4}{\Big|}\frac{6}{8}\overset{2}{\Big|}\frac{3}{4}$; oder:

$\frac{72}{96}\overset{4}{\Big|}\frac{18}{24}\overset{2}{\Big|}\frac{9}{12}\overset{3}{\Big|}\frac{3}{4}$; oder: $\frac{72}{96}\overset{6}{\Big|}\frac{12}{16}\overset{4}{\Big|}\frac{3}{4}$; oder: $\frac{72}{96}\overset{8}{\Big|}\frac{9}{12}\overset{3}{\Big|}\frac{3}{4}$; oder: $\frac{72}{96}\overset{12}{\Big|}\frac{6}{8}\overset{8}{\Big|}\frac{3}{4}$

Aus diesem Beispiele ersehen wir, daß sich ein Bruch oft auf mehrfache Weise kürzen läßt, so wie auch, daß das Kürzen oft noch fortgesetzt werden kann. Das Erste ist der Fall, wenn Zähler und Renner eines Bruches durch mehre Zahlen ohne Rest theilbar sind; das Zweite dann,

wenn nicht mit der größten gefundenen Zahl gekürzt wird. Setzt man in diesem Falle das Zurückführen eines Bruches fort, so können die Kürzungszahlen als Faktoren des größten Divisors angesehen werden. In obigem Beispiele ist 24 die möglich größte Kürzungszahl. 24 ist aber das Produkt der bei der Fortsetzung im Kürzen angewendeten Zahlen; denn $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$; $2 \times 3 \times 4 = 24$; $6 \times 4 = 24$; $8 \times 3 = 24$; $12 \times 2 = 24$. — Nur wenn ein Bruch mit der möglich größten Zahl gekürzt wird, oder wenn man das Kürzen fortsetzt, so lange es angeht, wird der zu kürzende Bruch auf die möglich kleinste Benennung gebracht, d. h. dessen Werth in den möglich kleinsten Zahlen ausgedrückt. Ist der möglich größte Divisor bekannt, so nimmt man gewöhnlich mit diesem das Heben vor.

Ob, und durch welche Zahl ein Bruch gekürzt werden kann, läßt sich an einigen Kennzeichen oder Merkmalen entnehmen, welche in der Theilbarkeit ganzer Zahlen begründet sind.

Diese Kennzeichen oder Regeln sollen hernach gezeigt werden. Vorab wollen wir noch die Begriffe Primzahlen, zusammengesetzte Zahlen, Maß und gemeinschaftliches Maß zu erklären suchen.

Die Zahl 18 läßt sich in Faktoren zerlegen, nämlich: $18 = 3 \times 6$, oder $18 = 2 \times 9$, oder $18 = 2 \times 3 \times 3$.

Die Zahl 19 läßt sich nicht in Faktoren zerlegen; denn 19 ist nur 1×19 oder 19×1, was aber keine Zerlegung ist.

Aus diesen zwei Beispielen ist klar, daß es Zahlen gibt, die sich in Faktoren zerlegen lassen, also aus Faktoren bestehen oder doch als daraus entstanden gedacht werden können, — und Zahlen, die sich nicht in Faktoren zerlegen lassen. Jene heißen zusammengesetzte Zahlen, (d. h. aus Faktoren zusammengesetzt), diese werden Primzahlen *) genannt. Die (aus Faktoren) zusammengesetzten Zahlen lassen sich durch sich selbst, durch die Eins und durch jeden ihrer Faktoren, durch deren Multiplikation sie entstanden sind oder als daraus entstanden gedacht werden können, ohne Rest dividiren. Primzahlen dagegen lassen sich nie mit einer ganzen Zahl, ausgenommen mit sich selbst und mit Eins ohne Rest theilen. Demnach:

Primzahlen sind alle jene Zahlen, die nur durch 1 und durch sich selbst ohne Rest theilbar sind. Z. B. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 ꝛc.

Zusammengesetzte Zahlen (im engern Sinne) sind alle jene Zahlen, die sich in Faktoren zerlegen und durch diese ohne Rest theilen lassen. Z. B.

a) $12 = 3 \times 4$, od. $= 2 \times 6$; b) $25 = 5 \times 5$; c) $105 = 3 \times 35$, oder $= 7 \times 15$, oder $= 21 \times 5$, oder $= 3 \times 5 \times 7$; d) $60 = 2 \times 30$, oder $= 3 \times 20$, oder $= 4 \times 15$, oder $= 5 \times 12$, oder $= 6 \times 10$, oder $= 2 \times 3 \times 10$ ꝛc.

---

*) Primzahlen sind zwar auch zusammengesetzte Zahlen, nämlich zusammengesetzt aus Summanden, was aber von allen Zahlen gilt. Daher muß das Wort „zusammengesetzt“ in einem engern und in einem weitern Sinne genommen werden. Im engern Sinne bedeutet es nur „zusammengesetzt aus Faktoren;“ daher es oben nur in dieser Bedeutung genommen werden darf.

Aus diesen letzten Beispielen ersehen wir wieder, daß sich selbst die Faktoren irgend einer Zahl oft noch zerlegen lassen. In Beispiel a der Faktor 4 in 2 × 2, der Faktor 6 in 2 × 3; in Beispiel e der Faktor 35 in 5 × 7, der Faktor 15 in 3 × 5, der Faktor 21 in 3 × 7; in Beispiel d der Faktor 30 in 3 × 10, oder in 5 × 6, der Faktor 15 in 3 × 5, der Faktor 12 in 2 × 6 oder in 3 × 4 u. s. w. Und selbst manche dieser Faktoren lassen sich oftmal auch noch weiter zerlegen, wie 10 in 2 × 5, 6 in 3 × 2, 4 in 2 × 2 ꝛc.

Auf diese Weise erhält man immer kleinere Zahlen zu Faktoren, die endlich nicht mehr weiter zerlegt werden können. Diese kleinsten, nicht weiter zerlegbaren Faktoren, sind also Primzahlen. Sonach ist jede zusammengesetzte Zahl ein Produkt aus Primzahlen, mit welchen sich dasselbe oder die zusammengesetzte Zahl ohne Rest dividiren lassen muß. Die Primzahlen sind folglich die einfachsten Theiler, d. h. diejenigen einfachsten Zahlen, durch welche sich zusammengesetzte Zahlen ohne Rest theilen lassen.

Solche Theiler (Divisoren) oder Zahlen, welche in andern Zahlen ohne Rest enthalten sind, heißen auch wol Maße der Zahlen. Eine Zahl messen heißt suchen, wie oft eine Zahl in einer andern ohne Rest enthalten ist. Man versteht also unter

Maß eine Zahl, die in einer andern ohne Rest enthalten diese ist, und unter

messen — dividiren mit einer ganzen Zahl in eine andere, in welcher jene ohne Rest enthalten ist.

Die Zahl 105 kann gemessen werden durch die Zahlen 3, 5, 7, 15, 21, 35. — 3, 5, 7 sind Primzahlen, folglich die einfachsten oder kleinsten Maße; 35 aber ist die möglich größte Zahl für 105, denn eine noch größere Zahl als 35 ist in 105 ohne Rest nicht enthalten. Die möglich größte Zahl, die in einer andern ohne Rest enthalten ist, heißt darum das **möglich größte Maß** für diese Zahl.

Kann eine Zahl nur durch sich selbst, oder nur durch 1 gemessen werden, so ist sie eine Primzahl an und für sich. Vergleicht man aber eine Zahl mit einer andern in der Hinsicht, ob sich beide durch ein und dieselbe Zahl ohne Rest theilen lassen, d. h., ob sie beide ein gemeinschaftliches Maß haben; so kommt man auf den Begriff von Primzahlen zu-, gegen- oder untereinander, also Primzahlen unter sich. Zwei oder mehre Zahlen, die sich nicht mit ein und derselben Zahl messen (ohne Rest theilen) lassen, also kein gemeinschaftliches Maß haben, nennt man Primzahlen untereinander oder unter sich. — Die Zahlen 7 und 11 sind Primzahlen schon an und für sich; sie sind aber auch Primzahlen unter sich, denn sie haben kein gemeinschaftliches Maß. 5 ist eine Primzahl an und für sich; 8 ist keine Primzahl, denn sie läßt sich messen durch 2 und 4. Vergleichen wir aber beide Zahlen miteinander, so finden wir, daß sie unter sich kein gemeinschaftliches Maß haben, also Primzahlen unter sich sind. — Auch 9 und 25 sind aus demselben Grunde Primzahlen unter sich, obgleich jede für sich keine Primzahl ist; denn 9 hat 3, und 25 hat 5 zum Maß. Daraus erhellet:

Primzahlen an und für sich sind immer auch Primzahlen unter sich; Primzahlen unter sich sind nicht nothwendig Primzahlen an und für sich.

Die Zahlen 36 und 54 sind keine Primzahlen, und zwar weder an und für sich, noch unter sich, weil beide durch die Zahlen 2, 3, 6, 9, 18 ohne Rest theilbar sind, also diese Zahlen zu gemeinschaftlichen Theilern haben. 2 ist der kleinste, 18 der größte gemeinschaftliche Divisor für 36 und auch für 54.

Der möglich größte gemeinschaftliche Theiler zweier Zahlen heißt auch **das möglich größte gemeinschaftliche Maß** derselben.

Nun gehen wir zu den Kennzeichen über, aus welchen sich entnehmen läßt, ob — und mit welcher Zahl ein Bruch gekürzt werden kann.

Kennzeichen, ob und mit welcher Zahl von 1—12 sich ein Bruch kürzen läßt.

Da die Brüche aus zwei Theilen, einem Zähler und einem Nenner bestehen, welche in Zahlen dargestellt werden, so hat man für das Kürzen eines Bruches immer eine solche Zahl zu suchen, mit der sowol der Zähler, als auch der Nenner ohne Rest getheilt werden kann, d. i. man hat zu untersuchen, welches das gemeinschaftliche Maß für Zähler und Nenner ist. Aus der Entwickelung über Primzahlen ist klar, daß Brüche, deren Zähler und Nenner Primzahlen an und für sich oder auch unter sich sind, nicht gekürzt werden können.

1. Durch 1 sind alle Zahlen theilbar; denn jede Zahl drückt aus, wie oftmal 1 sie ist. 5 heißt eben nur 5 × 1. So viele Einheiten eine Zahl ausdrückt, eben so oftmal muß 1 in ihr enthalten sein. Daher hat jede Zahl, durch 1 getheilt, sich selbst zum Quotienten. Es ändern sich durch die Division mit 1 die Zahlen gar nicht, weßwegen auch nie mit 1 dividirt wird. Man drückt dieses gewöhnlich so aus: „1 dividirt nicht.“ (Was heißt auch das: „1 multiplizirt nicht?“)

2. Durch 2 sind alle Zahlen ohne Rest theilbar, deren Einheiten es sind. Die ohne Rest theilbaren Einheiten sind 2, 4, 6, 8. Z. B.

$$\stackrel{2}{\overbrace{\frac{134}{178}\Big|\frac{67}{89}}}.\qquad \stackrel{2}{\overbrace{\frac{576}{982}\Big|\frac{288}{491}}}.\qquad \stackrel{2}{\overbrace{\frac{3578}{4096}\Big|\frac{1789}{2048}}}$$

Der Grund ist folgender: Alle Zehner, Hunderter, Tausender ꝛc. sind durch 2 ohne Rest theilbar, weil diese gleichsam Produkte aus 2 sind; denn 10 = 5 × 2, 100 = 50 × 2 u. s. w. Demnach hängt die Theilbarkeit einer Zahl nur von den Einern ab. Sind diese durch 2 ohne Rest theilbar, so ist es auch die ganze Zahl; sind sie es nicht, so ist es auch die ganze Zahl nicht. Theilbar ohne Rest durch 2 sind 2, 4, 6, 8, dann alle Zahlen, welche 2, 4, 6, 8 zu Einern, und auch diejenigen, welche keine Einheiten, oder auch keine Zehner, Hunderter ꝛc. bei sich haben, also mit Nullen endigen; nicht theilbar durch 2 sind 1, 3, 5, 7, 9

und alle Zahlen, die 1, 3, 5, 7, 9 zu Einern haben. Alle diese heißen **ungerade**, alle jene aber **gerade** Zahlen.

Beispiele: $\overset{2}{\frac{10}{16}\Big|\frac{5}{8}}$; $\overset{2}{\frac{148}{270}\Big|\frac{74}{135}}$; $\overset{2}{\frac{170}{250}\Big|\frac{85}{125}}$; $\frac{600}{720}\overset{2}{\Big|}\frac{300}{360}\overset{2}{\Big|}\frac{150}{180}\overset{2}{\Big|}\frac{75}{90}$.

3. Durch 3 sind alle Zahlen ohne Rest theilbar, deren Quersumme es ist. Unter Quersumme versteht man die Summe aller Zahlen, die durch die einzelnen Ziffern bezeichnet werden, ohne Rücksicht ihres Werthes auf der Stelle, die jede Ziffer in der Zahl einnimmt. Z. B. die Quersumme der Zahl 8367 ist $8 + 3 + 6 + 7 = 24$.

Als Beispiel: $\frac{477}{2517}$. $\begin{matrix} 4+7+7=18. & 3:18=6. \\ 2+5+1+7=15. & 3:15=5. \end{matrix}$ $\overset{3}{\frac{477}{2517}\Big|\frac{159}{839}}$.

Die Gründe sind diese: Theilt man 10 durch 3, so erhält man 1 zum Rest, denn $3: 10 = 3 + 1$; theilt man 100 durch 3, so bleibt ebenfalls 1 zum Rest; eben so bleibt 1 zum Rest, wenn man 1000, 10,000 ꝛc. durch 3 theilt. 2, 3, 4, 5 ꝛc. Zehner, Hunderter, Tausender ꝛc. durch 3 dividirt, lassen auch eben so viele 1 zum Rest; folglich bei dem Zähler des Bruches bleiben $4 + 7 + 7 = 18$, und bei dem Nenner $2 + 5 + 1 + 7 = 15$ zum Rest. Sind nun die Summen dieser Reste durch 3 rein theilbar, wie es in diesen beiden Summen wirklich der Fall ist, nämlich 3 ist in 18 6mal und in 15 5mal ohne Rest enthalten: so ist auch die ganze Summe durch 3 ohne Rest theilbar; wenn nicht, so auch nicht. Jener Bruch ($^{477}/_{2517}$) läßt sich also durch 3 kürzen, weil die Quersummen beider Zahlen, die des Zählers und des Nenners durch 3 rein dividirt werden können.

4. Durch 4 können alle Brüche gekürzt werden, deren **Einer** und Zehner (als **eine** Summe) sich durch 4 ohne Rest theilen lassen.

Z. B. $\overset{4}{\frac{592}{748}\Big|\frac{148}{187}}$.

Gründe: 92 und 48 sind durch 4 ohne Rest theilbar, weil 92 und 48 gleichsam Produkte aus 4 sind, deßwegen lassen sich auch die Zahlen 592 und 748 ohne Rest durch 4 theilen; denn ein Hundert, ein Tausend ꝛc. sind theilbar durch 4, also auch 2, 3, 4, 5 ꝛc. Hunderter, Tausender u. s. w., weil diese ebenfalls Produkte aus 4 sind. Z. B. $100 = 25 \times 4$.

5. Durch 5 sind alle Brüche zu heben, wenn die Einheitsstelle des Zählers und des Nenners 5 oder 0 ist. Z. B.

$\overset{5}{\frac{25}{70}\Big|\frac{5}{14}}$; $\overset{5}{\frac{360}{495}\Big|\frac{72}{99}}$; $\overset{5}{\frac{830}{1740}\Big|\frac{166}{348}}$; $\frac{400}{700}\overset{5}{\Big|}\frac{80}{140}\overset{5}{\Big|}\frac{16}{28}$

Gründe: Alle Zehner, Hunderter, Tausender ꝛc. können als Produkte

aus 5 angesehen werden und sind folglich durch 5 theilbar, ohne einen Rest zu lassen. Sind nun die Einer durch 5 ohne Rest theilbar, so sind es auch die ganzen Zahlen. Man hat daher nur die Einer zu berücksichtigen.

6. Durch 6 lassen sich alle Zahlen kürzen, welche durch 2 und 3 ohne Rest theilbar sind, oder alle Zahlen, deren Quersumme durch 3 ohne Rest theilbar ist und deren Einer gerade Zahlen oder Nullen sind.

Z. B. $\frac{576}{1758} = \frac{96}{293}$ (÷6); $\frac{450}{732} = \frac{75}{122}$ (÷6)

Gründe: Sind die Einerstellen gerade Zahlen, wie es bei diesen Brüchen der Fall ist, so ist die ganze Zahl durch 2 ohne Rest theilbar; sind die Quersummen durch 3 rein theilbar, so sind es auch die ganzen Zahlen selbst. Die fernern Gründe sind bereits unter Ziff. 2 und 3 angegeben. Da sich nun jeder Bruch zuerst durch 2 und dann noch durch 3 kürzen läßt, so werden sich beide Brüche auch durch 6, was nur Produkt der Faktoren 2 und 3 oder der einfachen Theiler ist, kürzen lassen, wie die Beispiele zeigen.

7. Um zu finden, welche Zahlen sich durch 7 ohne Rest theilen lassen, mag folgendes Verfahren zeigen. Als Beispiel wählen wir die Zahl 54,978 und lösen sie zuerst in ihre einzelnen Stellen nach Einern, Zehnern, Hunderten 2c. auf. Hierauf suchen wir nun die Reste, welche sich ergeben durch die Division mit 7 in 1, 10, 100, 1,000 und 10,000, nehmen sodann diese Reste so oftmal für jede Stelle, als die Zahl Einer, Zehner, Hunderter 2c. hat, und untersuchen endlich, ob sich die Summe sämmtlicher Reste durch 7 rein dividiren läßt. Also:

54,878 =	8 Einer	oder 8 × 1.	7: 1 =	0,	Rest 1;
	7 Zehner	„ 7 × 10.	7: 10 =	1,	„ 3;
	9 Hunderter	„ 9 × 100.	7: 100 =	14,	„ 2;
	4 Tausender	„ 4 × 1,000.	7: 1,000 =	142,	„ 6;
	5 Zehntaus.	„ 5 × 10,000.	7: 10,000 =	1428,	„ 4.

8 Einer	= 8 × 1 = 8 Rest;	7 ist wieder in 8 enthalten,	daher 7: 8 = 1,	Rest 1;
7 Zehner	= 7 × 3 = 21 „;	7 „ „ „ 21 „,	„ 7: 21 = 3,	„ 0;
9 Hunderter	= 9 × 2 = 18 „;	7 „ „ „ 18 „,	„ 7: 18 = 2,	„ 4;
4 Tausender	= 4 × 6 = 24 „;	7 „ „ „ 24 „,	„ 7: 24 = 3,	„ 3;
5 Zehntaus.	= 5 × 4 = 20 „;	7 „ „ „ 20 „,	„ 7: 20 = 2,	„ 6.
Summe der ersten Reste: 91	7 : 91 = 13.		Summe der zweiten Reste: 14	7 : 14 = 2.

Da sich nun die Summen dieser Reste (91 und 14) durch 7 rein dividiren lassen, so ist auch die ganze Zahl 54,978 durch 7 ohne Rest theilbar. Ließen die Reste bei der Division derselben durch 7 einen Rest, so würde die ganze Zahl auch denselben Rest geben, d. h. sie wäre also nicht rein theilbar durch 7. Man versuche dieses nur an den Zahlen 54,979 und 54,977, indem man diese beiden Zahlen gerade so behandelt, wie die Zahl 54,978. Bei 54,979 ergibt sich ein Rest von 1, und bei 54,977 ein Rest von 6.

Dieses Verfahren, wie es die obige Darstellung zeigt, läßt sich auf alle Zahlen anwenden, wofür wir folgende allgemeine Regeln aus der Behandlung ableiten, nämlich:

a) Man zerlege die gegebene Zahl in ihre einzelnen Einer, Zehner, Hunderter u. s. w.;

b) hierauf suche man, welche Reste die zum Divisor gegebene Kürzungs-Zahl (im obigen Beispiel 7) in 1, 10, 100, 1,000 läßt;

c) diese Reste multiplizire man mit der in der gegebenen Zahl (dem Dividendus) enthaltenen Anzahl von Einern, Zehnern, Hundertern 2c. und merke sich diese Restprodukte, oder man dividire dieses Produkt wieder durch den gegebenen Divisor und schreibe die allenfalls bleibenden Reste besonders an;

d) endlich zähle man diese Reste zusammen und theile die sich ergebende Summe durch den gegebenen Divisor. Ist der gegebene Divisor in dieser Summe ohne Rest enthalten, so läßt sich die in Frage stehende Zahl auch ohne Rest theilen; wenn nicht, so ist auch diese nicht rein theilbar.

Wie jedoch die Darstellung zeigt, ist dieses Verfahren zu weitschweifig, um es zur gewöhnlichen Anwendung empfehlen zu können. Viel schneller wird man zum Ziele kommen, wenn man gleich probirt, ob sich eine Zahl mit 7, 11, 13 u. dgl. kürzen läßt. *)

8. Durch 8 sind Zähler und Nenner eines Bruches ohne Rest theilbar, wenn ihre Einer, Zehner und Hunderter (als vereinigte Zahl) es sind. Z. B.

$$\overset{8}{\frac{37648}{50952}\,\Big|\,\frac{4706}{6369}}.$$

Gründe: 648 und 952 sind gleichsam Produkte aus 8, daher lassen sie sich durch 8 ohne Rest theilen. Da dann ferner alle Tausender, Zehntausender 2c. ebenfalls als Produkte aus 8 angesehen werden können, so muß sich wol Zähler und Nenner dieses Bruches mit 8 ohne Rest dividiren, also der Bruch sich mit 8 kürzen lassen.

9. Durch 9 sind alle Zahlen ohne Rest theilbar, deren Quersumme es ist. Z. B.

$$\overset{9}{\frac{2574}{6957}\,\Big|\,\frac{286}{773}}$$

*) In der allgemeinen deutschen Lehrerzeitung Nro. 21 v. J. 1855 ist von H. Baumann folgendes weniger weitläufige Verfahren angegeben: Man theile die gegebene Zahl von der Rechten nach der Linken in Abtheilungen von je 2, oder je 4 Stellen. Im ersteren Falle addire man das Doppelte der höchsten Abtheilung zur nächst niederen, addire das Doppelte der Summe zur folgenden — bis man zu Ende gekommen ist. Die letzte Summirung gibt eine Zahl, der man es meist sofort ansehen wird, ob 7 darin aufgeht. Geht 7 darin auf, so geht 7 in der ganzen Zahl auf. — Bringt man die gegebene Zahl in Abtheilungen von je 4 Stellen, so ist die höhere Abtheilung zu vervierfachen. Z. B. 52603278.

a) 52 60 | 32 | 78   7 | 98   1 | 12
104. | 328. | 720. | 14 | 2
146. 360. 798.   112   14

b) 5260 | 3278   43 | 26
| 21040 | 86
2 | 4318   1 | 12
| 8 | 2
4326 | 14

Grund: 7 in 100 bleibt 2 Rest; 7 in 10000 bleibt 4 Rest.

Die Gründe für dieses Verfahren sind beziehungsweise ganz dieselben, wie bei der Theilbarkeit der Zahlen durch 3. Es wird daher dorthin verwiesen.

10. Durch 10 sind alle jene Zahlen ohne Rest theilbar, die auf der Einerstelle eine Null haben. Z. B.

$$\underset{10}{\frac{270}{350}\Big|}\frac{27}{35};\quad \underset{10}{\frac{590}{700}\Big|}\frac{59}{70};\quad \underset{10}{\frac{2500}{4300}\Big|}\underset{10}{\frac{250}{430}\Big|}\frac{25}{43}.$$

Der Grund hievon ist leicht zu begreifen. Der Zehner ist durch 10 ohne Rest theibar; die Hunderter, Tausender ꝛc. sind nur Produkte oder Zusammenstellungen aus 10, folglich theilbar.

11. Um zu finden, ob sich eine Zahl durch 11 ohne Rest theilen läßt, verfahre man beziehungsweise wie bei der Zahl 7. Es gilt hier ganz das dort Gesagte. Z. B. 87,465!

87,465 =	5 Einer	oder 5 × 1.	11 : 1 = 0, Rest 1;
	6 Zehner	„ 6 × 10.	11 : 10 = 0, „ 10;
	4 Hunderter	„ 4 × 100.	11 : 100 = 9, „ 1;
	7 Tausender	„ 7 × 1,000.	11 : 1,000 = 90, „ 10;
	8 Zehntaus.	„ 8 × 10,000.	11 : 10,000 = 909, „ 1.

5 Einer	= 5 × 1 = 5 Rest;	daher auch	11 : 5 = 0, Rest 5;
6 Zehner	= 6 × 10 = 60 „ ;	„ „	11 : 60 = 5, „ 5;
4 Hunderter	= 4 × 1 = 4 „ ;	„ „	11 : 4 = 0, „ 4;
7 Tausender	= 7 × 10 = 70 „ ;	„ „	11 : 70 = 6, „ 4;
8 Zehntausender	= 8 × 1 = 8 „ ;	„ „	11 : 8 = 0, „ 8.
	Summe der I. Reste: 147		Summe der II. Reste: 26
	11 : 147 = 13, Rest 4.		11 : 26 = 2, Rest 4.

Da sich die Summe der Reste (147 und 26) durch 11 nicht ohne Rest dividiren lassen, so ist auch die Zahl 87,465 durch 11 nicht rein theilbar. Der Rest, den die Zahl 147 und 26 bei der Theilung durch 11 läßt, beträgt 4; eben denselben Rest läßt auch die obige Zahl, dividirt durch 11. Eine um 4 kleinere oder um 7 größere Zahl, nämlich 87461, oder 87,472, ist durch 11 rein theilbar. Diese Andeutung dürfte einige Beachtung verdienen; sie kann in gewissen Fällen von Nutzen sein. *)

12. Durch 12 lassen sich alle Zahlen kürzen, welche durch 3 und durch 4 ohne Rest theilbar sind, oder alle jene Zahlen, deren Quersumme

---

*) H. Baumann in derselben Nummer der allgm. deutsch. Lehrerzeitung: Da man nach gewöhnlicher schriftlicher Berechnung mit 11 multiplizirt, indem man den Multiplikandus zweimal so untereinander schreibt, daß die untere Reihe um eine Stelle nach links verschoben erscheint, und beide Reihen summirt; so muß der elfte Theil der Summe dieselben Einer haben, welche die Summe zeigt, und müssen sich Zehner, Hunderte, Tausende u. s. w. des Quotienten durch Subtraktion sehr leicht finden lassen. Z. B.

```
5798 × 11 =  5798
            5798
            ------
            6.3.7.7.8
            5798
            ------
             5798,
```

nämlich: 8 Einer; 8 von 7 borg' ich 1, 8 von 17 bleibt 9; 9 von 16 bleibt 7; 7 von 12 bleibt 5; 5 von 5 geht auf; demnach geht 11 in 63778 auf und zwar 5798mal.

sich durch 3 ohne Rest theilen lassen, und deren Einer und Zehner (als eine Summe) durch 4 theilbar sind. Z. B.

$$\frac{32{,}460}{44{,}052} \overset{12}{\smile} \frac{2{,}705}{3{,}671}$$

Die Quersumme des Zählers ist 15, die des Nenners ebenfalls 15, welche durch 3 ohne Rest theilbar ist. Die beiden letzten Stellen der Bruchzahlen 60 und 52 können durch 4 getheilt werden. Das Weitere ergibt sich aus dem zu Zahl 6, und beziehungsweise zu Zahl 3 und Zahl 4 Gesagten. Eine Zahl, die sich mit 3 und 4 theilen läßt, muß sich auch durch 12 dividiren lassen, weil 12 nur ein Produkt aus den beiden Faktoren 3 und 4 ist.

Nach den hierüber im Vorstehenden gegebenen Regeln wird es dem denkenden Lehrer ein Leichtes sein, noch weitere Vortheile aufzusuchen. Nur andeutungsweise möge hier noch bemerkt werden:

Eine Zahl, die sich durch
3 und 4 ohne Rest theilen läßt, ist auch durch 12 rein theilbar;
3 und 5 „ „ „ „ „ „ „ 15 „ „
3 und 6 „ „ „ „ „ „ „ 18 „ „
2 und 7 „ „ „ „ „ „ „ 14 „ „
3 und 7 „ „ „ „ „ „ „ 21 „ „
4 und 6 „ „ „ „ „ „ „ 24 „ „
5 und 9 „ „ „ „ „ „ „ 45 „ „
u. s. w.

Das möglich größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen zu finden.

Die vorstehend angegebenen Merkmale oder Regeln, um zu erkennen, ob und durch welche Zahl sich ein Bruch kürzen läßt, reichen nicht immer aus. Es gibt aber ein bestimmtes und ganz sicheres Verfahren, das möglich größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen zu finden. Dieses möglich größte gemeinschaftliche Maß muß immer bekannt sein, wenn man einen Bruch in den möglich kleinsten Zahlen ausdrücken will; denn in diesem Falle muß man Zähler und Nenner des Bruches durch ein und dieselbe möglich größte Zahl theilen, durch welche sich beide ohne Rest theilen lassen. Sind Zähler und Nenner eines Bruches Primzahlen an und für sich, oder unter sich; so ist der Werth eines solchen Bruches schon in den möglich kleinsten Zahlen ausgedrückt, und derselbe läßt sich also nicht weiter kürzen.

Der sicherste Weg, das möglich größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen zu finden, ist folgender:

a) Man dividire mit der kleinern Zahl in die größere (bei ächten Brüchen mit dem Zähler in den Nenner); geht die Division auf, so ist die kleinere Zahl (der Zähler) selbst das möglich größte gemeinschaftliche Maß beider Zahlen, mit welcher sich also der Bruch kürzen läßt.

b) Geht die Division nicht auf, bleibt also ein Rest, so dividire man mit diesem Reste den vorigen Divisor; geht die Division jetzt auf, so ist der erste Rest oder dieser zweite Divisor das möglich größte gemeinschaftliche Maß.

c) Geht jedoch die Division abermals nicht auf, so dividirt man mit diesem letzten Reste den nächstvorhergegangenen Divisor, und setzt dieses Verfahren so lange fort, bis einmal die Division aufgeht, also kein Rest mehr bleibt. — Dieses kann auch so ausgedrückt werden: Die kleinere Zahl (den Zähler) nimmt man zum ersten Divisor, die größere Zahl (den Nenner) zum Dividendus und führt die Division aus. Geht die Theilung auf, d. h. bleibt kein Rest, so ist der Divisor das möglich größte gemeinschaftliche Maß. Bleibt ein Rest, so muß die Theilung so lange fortgeführt werden, bis kein Rest mehr bleibt, die Division also aufgeht, wobei der jedesmalige Rest der eben vollzogenen Division als Divisor, und der Divisor derselben als Dividend genommen wird. Sobald die Division aufgeht, so hat man das möglich größte gemeinschaftliche Maß (für Zähler und Nenner eines Bruches) gefunden. Diese Zahl ist jedes Mal der letzte Divisor, mit welcher sich der Bruch kürzen und zugleich auf seine kleinste Benennung bringen läßt.

d) Ist der letzte Divisor 1, so ist 1 auch das möglich größte gemeinschaftliche Maß für Zähler und Nenner des gegebenen Bruches, d. h. die beiden Zahlen sind Primzahlen entweder schon an und für sich, oder doch unter sich, und der Bruch läßt sich nicht in kleinern Zahlen ausdrücken, d. i. er läßt sich nicht kürzen. Folgende Beispiele werden die Sache noch anschaulicher machen.

1. Welches ist das möglich größte gemeinschaftliche Maß für die beiden Zahlen 329 und 1974?

Berechnung: 329 : 1974 = 6
1974

Hier ist 329 das möglich größte gemeinschaftliche Maß für beide Zahlen; denn mit 329 läßt sich sowol in 329, als auch in 1974 ohne Rest dividiren, wie die Berechnung zeigt. (Siehe a.) Ein größeres Maß als 329 kann es offenbar nicht geben.

2. Welches ist das möglich größte gemeinschaftliche Maß für Zähler und Nenner des Bruches $^{2067}/_{2756}$? und wie heißt dann dieser Bruch in seiner kleinsten Form dargestellt?

Berechnung: 2067 : 2756 = 1
2067
-689 | 2067 = 3
2067

$$\frac{2067}{2756}\Big|_{689}\ \frac{3}{4}$$

In diesem Beispiele ist 689 das möglich größte gemeinschaftliche Maß für Zähler und Nenner des gegebenen Bruches. Dieses läßt sich auch leicht erklären, denn da 689 in 2067 ohne Rest und auch in sich selbst,

nämlich in 689 enthalten ist, so muß auch dieselbe Zahl in 2067 + 689 = 2756 ohne Rest enthalten sein. Eine größere Zahl als 689 kann es für dieses Beispiel nicht geben, eben weil eine größere Zahl als 689 in 689 nicht rein enthalten ist. Der gegebene Bruch läßt sich demnach durch 689 kürzen und heißt in seiner kleinsten Form dargestellt $^{3}/_{4}$. (Siehe b.)

3. Wie heißt der Bruch $^{287}/_{938}$ in seiner möglich kleinsten Form ausgedrückt? oder welches ist das möglich größte gemeinschaftliche Maß für Zähler und Nenner, womit der Bruch gekürzt werden muß?

Berechnung: 287 : 938 = 3

```
861
-77|287 = 3
    231
    -56|77 = 1
        56
        21|56 = 2
           42
           14|21 = 1
              14
              -7|14 = 2
                 14
                 --
```

Der letzte Divisor, wobei die Division aufgeht, ist 7; also ist 7 das möglich größte gemeinschaftliche Maß für Zähler und Nenner des Bruches $^{287}/_{938}$, um den Bruch zu kürzen und ihn zugleich in den möglich kleinsten Ziffern darzustellen. (Siehe c.)

Erklärung über die Richtigkeit dieses Verfahrens:

7 ist ohne Rest enthalten in	14 u. in 7,	also auch in	14 + 7 = 21
7 " " " " "	21 " 14,	" " "	(2 × 21) + 14 = 56
7 " " " " "	56 " 21,	" " "	56 + 21 = 77
7 " " " " "	77 " 56,	" " "	(3 × 77) + 56 = 287
7 " " " " "	287 " 77,	" " "	(3 × 287) + 77 = 938

Diese Darstellung zeigt klar, daß nur 7 das möglich größte gemeinschaftliche Maß für Zähler und Nenner des gegebenen Bruches ist und sein kann; denn eine größere Zahl als 7 ist in 7 nicht rein enthalten. Gekürzt heißt der gegebene Bruch $^{41}/_{134}$, nämlich:

$$\frac{287}{938} \overset{7}{\Big|} \frac{41}{134}$$

4. Welches ist das möglich größte gemeinschaftliche Maß für Zähler und Nenner, um den Bruch $^{749}/_{1851}$ zu kürzen?

```
Berechnung:  749 : 1851 = 2
                   1498
                   -353|749 = 2
                        706
                        -43|353 = 8
                            344
                            --9|43 = 4
                                36
                                -7|9 = 1
                                   7
                                   2|7 = 3
                                     6
                                     1|2 = 2
                                       2
                                       -
```

Das möglich größte gemeinschaftliche Maß für die Zahlen 749 und 1851 ist 1, d. h. also, diese beiden Zahlen sind Primzahlen unter sich, folglich läßt sich der Bruch $^{749}/_{1851}$ gar nicht kürzen. (Siehe d.)

Der Beweis ist auf folgende Weise zu führen:

Da sich 7 durch 2 ohne Rest nicht theilen läßt, so läßt sich auch 9 durch 7 nicht ohne Rest theilen, da 9 aus $1 \times 7 + 2$ besteht; läßt sich 9 ohne Rest durch 7 nicht theilen, so ist auch 43 durch 9 ohne Rest nicht theilbar, da 43 aus $4 \times 9 + 7$ besteht, u. s. w. hinauf.

Gewöhnlich wird die letzte Division, wenn 1 zum Reste bleibt, nicht mehr ausgeführt, und man sagt daher: wenn bei einer solchen Division 1 zum Reste bleibt, so ist dieses das Kennzeichen, daß sich ein Bruch nicht kürzen läßt.

9. Schriftliche Darstellung über die Verwandlung ungleichnamiger Brüche in gleichnamige.

Unter Ziffer 8. der mündlichen Uebungen (s. Seite 38 u. ff.) sind die Gründe für das Verfahren, ungleichnamige Brüche in gleichnamige zu verwandeln, entwickelt worden.

Das allgemeine und überall anwendbare schriftliche Verfahren, zwei oder mehre gegebene Brüche unter einen gemeinschaftlichen Nenner zu bringen, ist folgendes:

Man multiplizire Zähler und Nenner jedes einzelnen Bruches mit allen Nennern der übrigen Brüche, die unter einerlei Benennung gebracht werden sollen. Z. B.

1) $^1/_2$ und $^2/_3$ sollen gleichnamig gemacht werden!

2) Bringe $^1/_4$, $^3/_5$, $^6/_7$ und $^5/_9$ unter einen gleichen Namen!

Darstellung und Berechnung:

ad 1) $\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$ ad 2) $\frac{1 \times 5 \times 7 \times 9}{4 \times 5 \times 7 \times 9} = \frac{315}{1260}$ $\frac{6 \times 4 \times 5 \times 9}{7 \times 4 \times 5 \times 9} = \frac{1080}{1260}$

$\frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$ $\frac{3 \times 4 \times 7 \times 9}{5 \times 4 \times 7 \times 9} = \frac{756}{1260}$ $\frac{5 \times 4 \times 5 \times 7}{9 \times 4 \times 5 \times 7} = \frac{700}{1260}$

Dieses Verfahren, Brüche gleichnamig zu machen, kann zwar in allen Fällen angewendet werden und gibt auch immer ein richtiges Resultat. Allein, wie schon aus der Darstellung dieser beiden kleinen Beispiele ersichtlich ist, ist eine solche Operation, besonders wenn Brüche mit mehrstelligen Nennern gegeben sind, meistens sehr mühsam und langwierig. Es wird daher gewöhnlich nach folgender allgemeinen Regel, die wir schon bei den mündlichen Uebungen entwickelt haben, verfahren, nämlich:

Man suche vor Allem den gemeinschaftlichen oder Haupt-Nenner für die gegebenen Brüche. In diesen Haupt-Nenner dividire man mit jedem Nenner der gegebenen Brüche und multiplizire jedes Mal den sich ergebenden Quotienten mit dem Zähler des betreffenden Bruches. Das heißt:

Man suche zuerst diejenige Zahl, welche angibt, in wie viele kleinere Theile die Einheit oder das Ganze getheilt werden muß, daß diese Theile sich auf alle einzelnen Theile der gegebenen Brüche ohne Rest vertheilen lassen. Sodann untersucht man durch Division, wie viele von den kleinern Theilen der Einheit es auf einen Theil jedes der gegebenen Brüche trifft, und nimmt diese Anzahl der neuen Theile so oftmal, als Theile eines Ganzen der gegebene Bruch durch seinen Zähler anzeigt. — Die folgenden Beispiele werden die Sache noch klarer machen.

Aus den mündlichen Uebungen sind uns mehre Fälle bekannt, den Hauptnenner aufzufinden. Für das schriftliche Verfahren nach obiger allgemeiner Regel können wir diese auf folgende Fälle zurückführen.

1. Fall. Das Produkt sämmtlicher Nenner der gegebenen Brüche ist der gemeinschaftliche oder Haupt-Nenner.

Beispiel. Wie heißen folgende Brüche unter einerlei Benennung: $^1/_5$, $^3/_7$, $^8/_9$?

In dem Produkte sämmtlicher Nenner ist jeder Nenner der gegebenen Brüche ohne Rest enthalten, und deßwegen ist dasselbe auch der Hauptnenner. Um also diesen zu erhalten, vervielfache man alle Nenner der gegebenen Brüche unter einander, nämlich $5 \times 7 \times 9 = 315$; d. h. die Einheit muß in 315 gleiche Theile getheilt werden ($1 = {}^{315}/_{315}$), damit sich diese sowol auf die 5tel, als auch auf die 7tel und 9tel vertheilen lassen. — Nun dividire man mit 5 in 315, d. i. man suche, wie viele von den 315 neuen Theilen der Einheit auf ein Fünftel treffen. Ein Fünftel ist der 5te Theil der Einheit. Wird diese Einheit in 315 Theile $= {}^{315}/_{315}$ getheilt, so kommt auf ein Fünftel der 5te Theil von der in 315 Theile getheilten Einheit; also $5 : 315 = 63$. Ein Fünftel enthält daher 63 315tel $= {}^{63}/_{315}$. — Hierauf suche man ebenso, wie viele Theile es von den 315 kleinern Theilen auf ein Siebentel trifft. Ein Siebentel ist der 7te Theil der Einheit; also $7 : 315 = 45$. Ein Siebentel enthält 45 315tel $= {}^{45}/_{315}$. Der Zähler des Bruches zeigt an, daß 3 Siebentel vorhanden sind; folglich müssen diese 45 315tel 3mal genommen werden, nämlich $45 \times 3 = {}^{135}/_{315}$. Endlich nehme man von den $^{315}/_{315}$ ein Neuntel und dieses Neuntel 8mal, nämlich: $9 : 315 = 35$; $35 \times 8 = {}^{280}/_{315}$, weil ein Neuntel u. s. w., (wie bei den vorigen beiden Brüchen.)

Die Brüche haben nun gleiche Benennung, deren Hauptnenner 315, als das Produkt der Nenner der Brüche ist.

Bei der schriftlichen Darstellung schreibt man die Brüche, die unter gleichen Namen gebracht werden sollen, senkrecht unter einander, zieht rechts einen senkrechten und oben einen kleinen wagrechten Strich, über welchen man den Hauptnenner setzt, und führt dann die Berechnung aus, wie oben gesagt.

Schriftliche Darstellung und Berechnung:

	315			315			315	
$^1/_5$	$63 \times 1 = {}^{63}/_{315}$	Oder:	$^1/_5$	$63 \times 1 = 63$	Oder	$^1/_5$	63	63
$^3/_7$	$45 \times 3 = {}^{135}/_{315}$		$^3/_7$	$45 \times 3 = 135$	kürzer:	$^3/_7$	45	135
$^8/_9$	$35 \times 8 = {}^{280}/_{315}$		$^8/_9$	$35 \times 8 = 280$		$^8/_9$	35	280

Bei den beiden letztern Darstellungen setzt man in Gedanken den über den Querstrich geschriebenen Hauptnenner zu jedem Zähler.

Diese Verfahrungsweise, den gemeinschaftlichen Nenner für zwei und mehre gegebene Brüche durch Multiplikation ihrer Nenner aufzusuchen, kann zwar in allen Fällen angewendet werden; allein man erhält dann nicht immer den möglich kleinsten Hauptnenner. Diesen wird man nach dem angegebenen Verfahren nur dann erhalten, wenn die Nenner der gegebenen Brüche, wie es in obigem Beispiele der Fall ist, keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, also Primzahlen an und für sich, oder unter sich sind, in welchen Fällen es immer angewendet werden muß.

Sind die kleinern Nenner gegebener Brüche in dem größten derselben ohne Rest enthalten, oder haben zwei oder mehre Nenner gemeinschaftliche Theiler, so kann zwar auch dasselbe Verfahren, Multiplikation aller Nenner unter einander, Anwendung finden; aber man erhält dann in diesen Fällen nicht den möglich kleinsten Hauptnenner. Wie dieser gefunden werden kann, soll in nachfolgenden Fällen gezeigt werden.

2. Fall. Die kleinern Nenner der gegebenen Brüche sind in dem größten Nenner derselben ohne Rest enthalten.

Beispiel. Mache $^2/_3$, $^5/_8$, $^7/_{12}$ und $^{13}/_{24}$ gleichnamig!

Wir untersuchen nun, ob die kleinern Nenner in dem größten ohne Rest enthalten sind. Ist dieses der Fall, so behält man diesen letztern als gemeinschaftlichen oder Haupt-Nenner bei. Die Nenner 3, 8 und 12 sind in dem Nenner 24 rein enthalten, d. i. 24 ist ein Vielfaches aus 3, aus 8 und aus 12 ($24 = 3 \times 8, = 8 \times 3, = 12 \times 2$). In diesem Falle, so wie in allen ähnlichen Fällen, ist es also nicht nöthig, das Produkt sämmtlicher Nenner zum Hauptnenner zu machen, sondern 24 selbst ist nun als solcher beizubehalten, welcher erkennen läßt, daß die Einheit bloß in 24 gleiche Theile getheilt zu werden braucht, damit sich diese auf die 3tel, 8tel und 12tel vertheilen lassen. Wir nehmen also die Einheit $= {}^{24}/_{24}$ und suchen jetzt, wie viele 24tel es auf ein Drittel trifft, die dann 2mal genommen werden müssen. Eben so verfährt man mit $^5/_8$ u. s. w.

Schriftliche Darstellung und Berechnung:

	24		24		24	
$^2/_3$	$8 \times 2 \times {}^{16}/_{24}$	Oder $^2/_3$	$8 \times 2 = 16$	Oder $^2/_3$	8	16
$^5/_8$	$3 \times 5 \times {}^{15}/_{24}$	$^5/_8$	$3 \times 5 = 15$	kürzer: $^5/_8$	3	15
$^7/_{12}$	$2 \times 7 \times {}^{14}/_{24}$	$^7/_{12}$	$2 \times 7 = 14$	$^7/_{12}$	2	14
$^{13}/_{24}$	$1 \times 13 \times {}^{13}/_{24}$	$^{13}/_{24}$	$1 \times 13 = 13$	$^{13}/_{24}$	1	13

3. Fall. Der möglich kleinste Hauptnenner ist in einer Mittelzahl zu suchen.

Beispiel. Bringe $^2/_3$, $^3/_4$, $^1/_5$ und $^5/_6$ unter einen gemeinschaftlichen Nenner!

Hier überlege man, welches die kleinste Zahl ist, in welcher jeder Nenner rein aufgeht, d. h. man suche bei sich selbst die möglich kleinste Zahl, die mit jedem Nenner ohne Rest theilbar ist, welche dann als Hauptnenner genommen wird. Diese Zahl ist 60. Die Berechnung ist wie vorher.

Schriftliche Darstellung und Berechnung:

	60		60	
$^2/_3$	$20 \times 2 = 40$	Oder $^2/_3$	20	40
$^3/_4$	$15 \times 3 = 45$	kürzer: $^3/_4$	15	45
$^1/_5$	$12 \times 1 = 12$	$^1/_5$	12	12
$^5/_6$	$10 \times 5 = 50$	$^5/_6$	10	50

Sehr oft ist jedoch diese kleinste Mittelzahl durch eigene Ueberlegung nicht leicht, oder gar nicht zu finden; dann verfahre man auf folgende Weise.

1. Beispiel. Mache $^2/_3$, $^4/_7$, $^7/_9$ und $^{13}/_{14}$ gleichnamig!

Man vergleiche die Nenner mit einander. Der Nenner 3 ist in dem Nenner 9 ohne Rest enthalten; daher ist er auch in jeder andern Zahl, die ein Vielfaches aus 9 ist, ohne Rest enthalten, d. h. eine Zahl, die sich ohne Rest durch 9 theilen läßt, ist eben so auch durch 3 theilbar, und deßwegen braucht man den Nenner 3 für das Aufsuchen des Hauptnenners gar nicht weiter zu berücksichtigen. Ebenso verhält es sich mit den beiden Nennern 7 und 14, woher auch 7 keiner weitern Berücksichtigung bedarf. Es kommen daher nur noch die Nenner 9 und 14 in Betracht, für welche ein gemeinschaftlicher Nenner zu suchen ist. Da diese Primzahlen unter sich sind, also keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so ist ihr Produkt ihr Hauptnenner, nämlich $9 \times 14 = 126$, folglich auch der Hauptnenner, und zwar der möglich kleinste, für alle Nenner der gegebenen Brüche.

Schriftliche Darstellung und Berechnung:

	126		126	
$^2/_3$	$42 \times 2 = 84$	Oder $^2/_3$	42	84
$^4/_7$	$18 \times 4 = 72$	kürzer: $^4/_7$	18	72
$^7/_9$	$14 \times 7 = 98$	$^7/_9$	14	98
$^{13}/_{14}$	$9 \times 13 = 117$	$^{13}/_{14}$	9	117

2. Beispiel. Suche den möglich kleinsten Hauptnenner für folgende Brüche: $^2/_5$, $^7/_8$, $^{13}/_{45}$, $^5/_{24}$, $^7/_9$, $^{13}/_{14}$, $^9/_{16}$, $^6/_7$ und $^{11}/_{18}$! und mache sie sodann gleichnamig!

Vergleichen wir wieder die Nenner miteinander! 5, 8, 9 und 7 sind in 45, 24, 18 und 14 ohne Rest enthalten, daher braucht man jene aus den im 1. Beispiele dargestellten Gründen nicht weiter zu berücksichtigen. Es kommen sonach nur noch die Nenner 45, 24, 14, 16 und 18 in Betracht. Von diesen Nennern haben 24, 14, 16 und 18 den gemeinschaftlichen Theiler 2; nämlich 2 : 24 = 12; 2 : 14 = 7; 2 : 16 = 8, und 2 : 18 = 9. — Von diesen vier Theilern können aus denselben Gründen drei unberücksichtigt bleiben; denn in dem Produkte der übrig bleibenden Zahlen und einem Theiler (2 × 12 × 7 × 8 × 9 × 45) sind die Nenner 45, 24, 14, 16 und 18 ohne Rest enthalten. Die durch die Division mit 2 in 18 erhaltene Zahl 9 ist wieder in 45 rein enthalten und ist somit wieder unberücksichtigt zu lassen. 12 und 45 haben noch den gemeinschaftlichen Theiler 3; nämlich 3 : 12 = 4, und 3 : 45 = 15; es kann daher wieder ein Theiler außer Berücksichtigung bleiben. Es bleiben somit nur noch die beiden Theiler 2 und 3, und die Zahlen 4, 7, 8 und 15 übrig. Von diesen Zahlen geht abermals 4 in 8 auf, also braucht 4 ebenfalls nicht in Betracht gezogen zu werden. 7, 8 und 15 haben keinen gemeinschaftlichen Theiler. Für den Hauptnenner haben wir also nur noch die Zahlen 2, 3, 7, 8 und 15. Ihr Produkt gibt die kleinste Mittelzahl oder, was dasselbe ist, den möglich kleinsten Hauptnenner für die gegebenen Brüche; nämlich 2 × 3 × 7 × 8 × 15 = 5040.

Dieses Verfahren und das Gleichnamigmachen gegebener Brüche wird gewöhnlich in folgender Darstellung schriftlich ausgeführt:

Berechnung: —

	5040		
2/5	1008 ×	2 =	2016
7/8	630 ×	7 =	4410
13/45*)	112 ×	13 =	1456
5/24	210 ×	5 =	1050
7/9	560 ×	7 =	3920
13/14	360 ×	13 =	4680
9/16	315 ×	9 =	2835
6/7	720 ×	6 =	4320
11/18	280 ×	11 =	3080
			5040stel

Aufsuchen des Hauptnenners:

2) 5, 8, 45, 24, 9, 14, 16, 7, 18
3) 45, 12, 7, 8, 9
15, 4 7, 8
56 7)
840 15)
2520 3)
5040 2)

Also 2 × 3 × 15 × 7 × 8 = 5040 der Hauptnenner.

Regel. Die Nenner sämmtlicher gegebener Brüche werden neben einander geschrieben. Nun durchstreicht man alle Nenner, die in größern Nennern ohne Rest enthalten sind, weil jene nicht weiter zu berücksichtigen sind; (in obigem Beispiele 5, 8, 9 und 7, weil 5 in 45, 8 in 24 oder 16, 9 in 45 oder 18 und 7 in 14 aufgeht). Hierauf ziehe man einen Querstrich und dividire diejenigen nicht durchstrichenen Zahlen, welche einen gemeinschaftlichen Theiler haben mit diesem Theiler (hier 24, 14, 16 und 18 mit dem gemeinschaftlichen Divisor 2, welcher links an den Querstrich in einen Bogen gesetzt wird), und schreibe die Quotienten (12, 7, 8, 9)

*) Man sehe die nachfolgende Bemerkung.

darunter, so wie auch die durch den nämlichen Divisor nicht theilbaren Zahlen (hier nur 45). Nun untersuche man wieder, ob unter diesen Zahlen, mit Ausnahme des Theilers, welche vorhanden sind, die in den andern aufgehen, und durchstreiche sodann diese ebenfalls (hier 9 gegen 45). — Man ziehe abermals einen Querstrich und sehe, ob noch einige von den verbleibenden Zahlen einen gemeinschaftlichen Theiler haben, mit welchem dieselben dann wieder dividirt und deren Quotienten, so wie auch die nicht theilbaren Zahlen unter den Querstrich gesetzt werden. (Hier ist der gemeinschaftliche Theiler 3 für die Zahlen 45 und 12; ihre Quotienten sind also 15 und 4, und die nicht durch 3 rein theilbaren Zahlen sind 7 und 8). Nun kann wieder 4 gegen 8 gestrichen werden. — Auf diese Weise wird fortgefahren, bis keine Zahlen mehr vorkommen, die einen gemeinschaftlichen Theiler haben (hier 15, 7 und 8). Die angewendeten Divisoren dürfen jedoch nicht zur Vergleichung gezogen werden, denn dieselben sind Faktoren zu dem Hauptnenner, daher werden sie in einem Bogenstriche vorn an den Querstrich gesetzt (hier 2 und 3). — Nunmehr multiplizirt man die unter dem letzten Querstriche übrig gebliebenen Zahlen nebst allen gebrauchten Theilern unter einander, deren Produkt der möglich kleinste Hauptnenner für die gegebenen Brüche ist (hier also 8 × 7 × 15 × 3 × 2 = 5040).

Die weitere Behandlung, die Brüche selbst gleichnamig zu machen, ist bekannt.*)

Zu diesem Verfahren, den kleinsten Hauptnenner aufzusuchen, ist noch zu bemerken, daß man als Theiler, so lange es angeht, nur kleine Zahlen, nämlich 2 und 3 wähle, wenn gleich auch größere angewendet werden könnten, wie solches wol in obigem Beispiele der Fall wäre, wo man für die Nenner 45 und 18 den Theiler 9, und für 24 und 16 den Theiler 8 wählen könnte. Allein es trifft sich dann nicht selten, daß man in den folgenden Reihen nicht mehr dividiren kann, und dann Zahlen übrig bleiben, deren Produkt nicht den möglich kleinsten Hauptnenner darstellt. Z. B.

9)	5, 8, 45, 24, 9, 14, 16, 7, 18
8)	5, 24, 14, 16, 2
	5, 3, 14, 2

Also: 9 × 8 × 5 × 3 × 14 = 15120 der Hauptnenner, der aber größer ist als der vorige, nämlich als 5040.

*) Bei der Bearbeitung kann man sich oft die Sache dadurch erleichtern, daß man für diejenigen Brüche, deren Nenner ein Vielfaches des Nenners eines andern Bruches ist, aus der bereits gesuchten Anzahl der neuen Theile, die es auf einen Theil des Bruches mit dem kleinern Nenner trifft, die Anzahl der neuen Theile auf einen Theil des Bruches mit dem vielfach größern Nenner sucht. Z. B. Der Nenner des Bruches $^{13}/_{45}$ ist das 9-fache von dem Nenner des Bruches $^{2}/_{5}$, oder: 45 ist 9mal so groß als 5; die 45tel sind also 9mal kleinere Theile, als die 5tel. Es kommen daher auf ein 45tel 9mal weniger von den neuen Theilen, in welche die Einheit getheilt werden muß, nämlich von den 5040 Theilen, als auf ein 5tel, oder: auf $^{1}/_{45}$ trifft es nur den 9ten Theil von den Theilen, die es auf $^{1}/_{5}$ trifft. Auf $^{1}/_{5}$ trifft es 1008 neue Theile; auf $^{1}/_{45}$ also nur (9 : 1008 =) 112 solche Theile. — Eben so kann man verfahren mit den Brüchen $^{7}/_{8}$ und $^{5}/_{24}$ und $^{9}/_{16}$; die 24tel sind 3mal, die 16tel 2mal kleiner als die 8tel u. s. w., und so in allen andern ähnlichen Verhältnissen. —

Wollte man für obiges Beispiel nach dem im ersten Falle angegebenen Verfahren, nämlich durch Multiplikation sämmtlicher Nenner unter einander, den gemeinschaftlichen Nenner aufsuchen, so würde man zwar allerdings den richtigen, aber einen sehr großen Hauptnenner erhalten, nämlich:

$$5 \times 8 \times 45 \times 24 \times 9 \times 14 \times 16 \times 7 \times 18 = 10{,}973'491{,}200.$$ —

Der Lehrer übe die Schüler viel in schriftlicher Behandlung der Brüche, damit sie zu einer sichern Fertigkeit gelangen. Viele Arbeit verursacht den Schülern das Gleichnamigmachen ungleichnamiger Brüche; es übt und stärkt aber auch ihre Denkkraft in hohem Grade. —

Uebungsbeispiele.

1) Folgende Brüche mache gleichnamig! a) 1/3, 2/5; b) 3/4, 5/9; c) 1/5, 2/3, 4/7; d) 5/6, 2/7, 9/11; e) 1/2, 2/3, 4/5, 6/7; f) 3/5, 5/7, 5/8, 10/11.

2) Bringe unter gleiche Benennung! a) 3/4, 5/8; b) 2/3, 7/12; c) 3/5, 17/20; d) 1/2, 5/6, 7/12; e) 4/5, 3/8, 7/10, 23/40; f) 5/6, 3/4, 7/8, 11/12, 13/16, 41/48.

3) Mache gleichnamig! a) 5/6, 3/4; b) 1/6, 7/9; c) 2/3, 3/5, 11/12; d) 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6; e) 3/5, 7/12, 1/3, 7/15, 5/6; f) 1/4, 7/9, 5/8, 5/6, 7/12.

4) Bringe unter einerlei Namen! a) 3/5, 7/8, 5/16, 11/15; b) 2/3, 5/9, 3/4, 7/16; c) 5/9, 2/3, 3/4, 7/27; d) 5/8, 3/5, 11/25, 13/32; e) 8/9, 13/15, 20/27, 34/30.

5) Mache gleichnamig! a) 1/2, 4/5, 7/12, 5/8, 7/9; b) 2/3, 5/9, 3/8, 5/6, 11/12; c) 4/7, 5/8, 13/14, 11/20, 5/6; d) 7/9, 5/6, 13/24, 7/10, 19/27.

6) Bringe unter einerlei Benennung! a) 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, 7/8, 8/9; b) 4/5, 3/7, 8/15, 5/12, 13/21, 7/8; c) 5/9, 1/6, 14/15, 3/10, 7/12, 7/8, 3/4.

7) Bringe folgende Brüche unter gleiche Nenner! a) 5/8, 7/16; b) 2/3, 4/5, 3/7; c) 5/8, 7/12, 4/5; d) 3/4, 5/9, 7/16, 5/7; e) 3/4, 7/20, 13/14, 5/9, 18/25, 2/3; f) 2/3, 4/7, 7/8, 5/12, 8/9, 15/21, 4/5; g) 5/8, 13/15, 7/12, 1/2, 19/26, 7/18, 31/52, 5/6; h) 4/5, 13/16, 8/9, 17/18, 32/45, 17/60, 45/49, 131/140, 23/25; i) 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, 7/8, 8/9, 9/10.

8) Ordne folgende Brüche nach ihrer Größe vom kleinsten bis zum größten! a) 7/12, 4/5, 7/8, 11/14, 8/15, 13/16, 11/18, 17/20, 4/5; b) 11/16, 10/15, 7/12, 8/9, 13/14, 7/9, 6/7, 3/5, 17/20.

9) Wie heißen folgende Brüche unter einerlei Namen? a) 3/7, 5/6, 13/14, 7/8, 19/25, 27/28, 31/40, 43/56, 7/9; b) 5/8, 2/3, 65/72, 11/18, 23/30, 7/11, 11/12, 13/20, 5/9, 39/44, 4/5.

10) Wie findet man den möglich kleinsten Hauptnenner für gegebene Brüche? und wie werden Brüche gleichnamig gemacht?

Zweite Hauptübung.

Das Rechnen mit Bruchzahlen in den vier Grundrechnungsarten.

Die Vorübungen für das Rechnen mit Bruchzahlen werden, wenn dieselben anders gründlich durchgenommen worden sind, für die vier Grundrechnungsarten und für das Rechnen mit Brüchen überhaupt so weit vorbereitet haben, daß sich hierin keine besondere Schwierigkeiten mehr ergeben können. Auch kann man schon das Addiren und Subtrahiren, und theilweise auch das Multipliziren und Dividiren bei den entsprechenden Uebungen der Vorübungen für das Rechnen mit Bruchzahlen mit eintreten lassen, wenn man diese nicht vorab ganz durchnehmen will.

I. Zusammenzählen.

a) Mündliche Uebung.

1. Zusammenzählen gleichnamiger Brüche.

Beispiele.

1) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4}$ sind zusammen wie viel Viertel?
Berechnung: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$; $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Es ist also $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

2) $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{8}$ machen zusammen wie viel?
Berechnung: $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$; $\frac{4}{8} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8}$; $\frac{9}{8} + \frac{7}{8} = \frac{16}{8}$. $\frac{8}{8} = 1$; daher $\frac{16}{8} = 2$. Also sind $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{7}{8} = 2$.

3) Zähle zusammen $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$ und $\frac{3}{5}$!
Berechnung: $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$; $\frac{6}{5} + \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$. $\frac{5}{5} = 1$, und es bleiben daher von $\frac{9}{5}$ noch $\frac{4}{5}$ übrig. Also ist $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = 1\frac{4}{5}$.

Aus diesen Beispielen läßt sich die Regel ableiten: Beim Zusammenzählen gleichnamiger Brüche behandelt man die Zähler wie ganze Zahlen, d. h. man addirt die Zähler und gibt der Summe den gemeinschaftlichen Nenner zum Nenner. Entsteht ein uneigentlicher oder unächter Bruch, so werden die Ganzen herausgezogen, indem man mit dem Nenner in den Zähler dividirt; der allenfalls verbleibende Rest wird als Bruch den Ganzen beigesetzt.

4) Was machen zusammen $3\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{3}$.
Berechnung: $3 = 3$; $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$; $3 + 1 = 4$. Also ist $3\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 4$ Ganze.

5) $2\frac{8}{9}$ und $\frac{5}{9}$ geben wie viel zusammen?
Berechnung: $2 = 2$; $\frac{8}{9} + \frac{5}{9} = \frac{13}{9}$; $\frac{13}{9} = 1\frac{4}{9}$. $2 + 1 = 3$; $3 + \frac{4}{9} = 3\frac{4}{9}$. Es ist also $2\frac{8}{9} + \frac{5}{9} = 3\frac{4}{9}$.

6) Wie viel betragen zusammen $2^5/_8$ und $7^2/_8$.
Berechnung: $2+7=9$; $^5/_8+^2/_8=^7/_8$; $9+^7/_8=9^7/_8$. Also $2^5/_8+7^2/_8=9^7/_8$.

7) Zähle zusammen $1^3/_5$, $4^1/_5$, $3^4/_5$ und $6^2/_5$!
Berechnung: $1+4+3+6=14$ Ganze; $^3/_5+^1/_5=^4/_5$; $^4/_5+^4/_5=^8/_5$; $^8/_5+^2/_5=^{10}/_5=2$ Ganze; oder $^3/_5+^1/_5+^4/_5+^2/_5=^{10}/_5=2$; $14+2=16$. Also ist $1^3/_5+1^1/_5+3^4/_5+6^2/_5=16$.

Hieraus folgt die Regel: Sollen gemischte Zahlen, deren Brüche gleiche Nenner haben, zusammengezählt werden, so zähle man zuerst die Ganzen zusammen und dann auch die Brüche, wie vorhin. Ergeben die Brüche einen unächten Bruch, so zieht man die Ganzen heraus, addirt diese noch zu der Summe aus den Ganzen und fügt dieser Summe den etwa verbleibenden Bruch an.

Die gemischten Zahlen können auch zuerst aufgelöst, dann die Zähler addirt und die Ganzen herausgezogen werden, nämlich:

8) Zähle zusammen $2^5/_7$, $3^2/_7$, $5^6/_7$ und $4^4/_7$!
Berechnung: $2^5/_7=^{19}/_7$; $3^2/_7=^{23}/_7$; $5^6/_7=^{41}/_7$; $4^4/_7=^{32}/_7$. — $^{19}/_7+^{23}/_7+^{41}/_7+^{32}/_7=^{115}/_7=16^3/_7$. Das vorhergehende Verfahren ist aber das leichtere und ist weniger umständlich.

2. Zusammenzählen ungleichnamiger Brüche.

Beispiele.

1) Zähle zusammen $^1/_3$ und $^1/_4$!
1 Drittel und 1 Viertel können unter diesen Benennungen nicht addirt werden, weil sich Ungleichnamiges nicht zusammenzählen läßt. Nur Gleichbenanntes kann zu Gleichbenanntem gefügt werden; daher muß Ungleichnamiges vorerst gleichnamig gemacht werden. Wie ungleichnamige Brüche gleichnamig gemacht werden, ist aus den Vorübungen bekannt. (Siehe Seite 38 ff.)

Berechnung: $^1/_3$ und $^1/_4$ lassen sich in 12tel verwandeln. $^1/_3=^4/_{12}$ und $^1/_4=^3/_{12}$. Da die Brüche nun gleichnamig sind, so verfährt man ebenso, wie vorher bei den gleichnamig gegebenen Brüchen.

Also $^4/_{12}+^3/_{12}=^7/_{12}$. Es ist also $^1/_3+^1/_4=^7/_{12}$.

2) $^2/_5+^3/_8$ sind wie viel zusammen?
Berechnung: $^2/_5$ und $^3/_8$ lassen sich in 40stel auflösen. $^1/_5=^8/_{40}$; daher $^2/_5=^{16}/_{40}$; $^1/_8=^5/_{40}$, daher $^3/_8=^{15}/_{40}$; $^{16}/_{40}+^{15}/_{40}=^{31}/_{40}$. Also $^2/_5+^3/_8=^{31}/_{40}$.

3) Zähle zusammen $^3/_4$ und $^4/_5$!
Berechnung: $^3/_4$ und $^4/_5$ lassen sich in 20stel verwandeln. $^1/_4=^5/_{20}$, $^3/_4=^{15}/_{20}$; $^1/_5=^4/_{20}$, $^4/_5=^{16}/_{20}$; $^{15}/_{20}+^{16}/_{20}=^{31}/_{20}=1^{11}/_{20}$. Daher $^3/_4+^4/_5=1^{11}/_{20}$.

4) Was betragen zusammen $^2/_3$, $^3/_4$, $^5/_6$ und $^7/_{12}$?
Berechnung: Da die kleinern Nenner in dem größten ohne Rest enthalten sind, so behält man denselben, nämlich 12, als gemeinschaftlichen Nenner bei. $^2/_3=^8/_{12}$, $^3/_4=^9/_{12}$, $^5/_6=^{10}/_{12}$; $^8/_{12}+^9/_{12}+^{10}/_{12}+^7/_{12}=^{34}/_{12}=2^{10}/_{12}=2^5/_6$. Es ist also $^2/_3+^3/_4+^5/_6+^7/_{12}=2^{10}/_{12}=2^5/_6$.

5) $^3/_4$, $^5/_8$, $^2/_5$ und $^7/_{10}$ wie viel zusammen?

Berechnung: In der Zahl 40 sind sämmtliche Nenner der gegebenen Brüche ohne Rest enthalten, folglich lassen sich diese Brüche in 40stel verwandeln. $^3/_4 = ^{30}/_{40}$, $^5/_8 = ^{25}/_{40}$, $^2/_5 = ^{16}/_{40}$, $^7/_{10} = ^{28}/_{40}$; $^{30}/_{40} + ^{25}/_{40} + ^{16}/_{40} + ^{28}/_{40} = ^{99}/_{40} = 2^{19}/_{40}$. Also ist $^3/_4 + ^5/_8 + ^2/_5 + ^7/_{10} = 2^{19}/_{40}$.

Aus diesen Beispielen ergibt sich die Regel: Sollen ungleichnamige Brüche zusammengezählt werden, so muß man sie zuerst gleichnamig machen, und behandelt diese neuen Brüche eben so, wie gegebene gleichnamige Brüche.

6) Was geben zusammen $3^1/_4$, $^1/_3$ und $^1/_6$?

Berechnung: Hauptnenner ist 12. — $^1/_4 = ^3/_{12}$, $^1/_3 = ^4/_{12}$, $^1/_6 = ^2/_{12}$. $^3/_{12} + ^4/_{12} + ^2/_{12} = ^9/_{12} = ^3/_4$; $3 + ^3/_4 = 3^3/_4$. Es ist also $3^1/_4 + ^1/_3 + ^1/_6 = 3^3/_4$.

7) Zähle zusammen $4^1/_6$, $^3/_4$ und $^5/_8$!

Berechnung: Der gemeinschaftliche Nenner ist 24. — $^1/_6 = ^4/_{24}$, $^3/_4 = ^{18}/_{24}$, $^5/_8 = ^{15}/_{24}$; $^4/_{24} + ^{18}/_{24} + ^{15}/_{24} = ^{37}/_{24} = 1^{13}/_{24}$; $4 + 1^{13}/_{24} = 5^{13}/_{24}$. Es ist daher $4^1/_6 + ^3/_4 + ^5/_8 = 5^{13}/_{24}$.

8) Wie viel betragen $5^2/_3$, $^5/_6$ und $^1/_2$?

Berechnung: Hauptnenner ist 12. — $^2/_3 = ^8/_{12}$, $^5/_6 = ^{10}/_{12}$, $^1/_2 = ^6/_{12}$; $^8/_{12} + ^{10}/_{12} + ^6/_{12} = ^{24}/_{12} = 2$; $5 + 2 = 7$. Daher $5^2/_3 + ^5/_6 + ^1/_2 = 7$.

Regel: Sind gemischte Zahlen und ungleichbenannte Brüche zu addiren, so werden die Brüche vorerst gleichnamig gemacht, zusammengezählt, und, wenn sich unächte Brüche ergeben, die Ganzen herausgezogen, die man zu den gegebenen Ganzen addirt und der Summe den etwa noch verbleibenden Bruch beisetzt.

9) $2^1/_3$, $1^1/_4$ und $4^1/_{12}$, wie viel zusammen!

Berechnung: 12 ist der gemeinschaftliche Nenner. $2 + 1 + 4 = 7$; $^1/_3 = ^4/_{12}$, $^1/_4 = ^3/_{12}$; $^4/_{12} + ^3/_{12} + ^1/_{12} = ^8/_{12} = ^2/_3$; $7 + ^2/_3 = 7^2/_3$. Daher $2^1/_3 + 1^1/_4 + 4^1/_{12} = 7^2/_3$.

10) Was betragen $5^3/_4$, $3^4/_5$ und $6^5/_8$?

Berechnung: $5 + 3 + 6 = 14$. Der Hauptnenner für die Brüche ist 40. $^3/_4 = ^{30}/_{40}$, $^4/_5 = ^{32}/_{40}$, $^5/_8 = ^{25}/_{40}$; $^{30}/_{40} + ^{32}/_{40} + ^{25}/_{40} = ^{87}/_{40} = 2^7/_{40}$; $14 + 2^7/_{40} = 16^7/_{40}$. Also ist $5^3/_4 + 3^4/_5 + 6^5/_8 = 16^7/_{40}$.

Daraus folgt die Regel: Sind gemischte Zahlen mit ungleichbenannten Brüchen zu addiren, so werden zuerst die Ganzen addirt, dann die Brüche gleichnamig gemacht, zusammengezählt, die Ganzen herausgezogen, zu der Summe aus den Ganzen gezählt und dieser Summe der etwa verbleibende Bruch beigesetzt.

3. Zusammenzählen angewandter Bruchzahlen.

Beispiele.

1) Ein Landkrämer erhält $^1/_5$ Ztr. Tabak, $^3/_5$ Ztr. Kaffee und $^4/_5$ Ztr. Zucker; wie viele Zentner zusammen?

Berechnung: $^1/_5 + ^3/_5 + ^4/_5 = ^8/_5 = 1^3/_5$ Ztr. — Antw. Der Krämer erhielt zusammen $1^3/_5$ Ztr.

2) Ein Wirth schenkte bei einer Hochzeit aus: $5^5/_8$ Eimer Bier, $^7/_8$ Eim. Wein und $^3/_8$ Eim. Branntwein; wie viele Eimer im Ganzen?

Berechnung: $^5/_8 + ^7/_8 + ^3/_8 = ^{15}/_8 = 1^7/_8$; $5 + 1^7/_8 = 6^7/_8$ Eimer.

Antw. Der Wirth schenkte im Ganzen $6^7/_8$ Eimer aus.

3) Jemand gießt an $7\frac{3}{4}$ Maß scharfen Essig $2\frac{3}{4}$ Maß Wasser; wie viele Maß beträgt jetzt die Mischung? Berechnung: $7+2=9$; $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}=1\frac{2}{4}=1\frac{1}{2}$; $9+1\frac{1}{2}=10\frac{1}{2}$. Antw. Die Mischung beträgt $10\frac{1}{2}$ Maß.

4) Jemand kaufte auf einem Markte zwei Reste Tuch; der eine Rest mißt $\frac{5}{6}$ Ell. und der andere $\frac{4}{5}$ Ell.; wie viel Ellen messen beide Reste? Berechnung: 30 ist der gemeinschaftliche Nenner. — $\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$, $\frac{4}{5}=\frac{24}{30}$; $\frac{25}{30}+\frac{24}{30}=\frac{49}{30}=1\frac{19}{30}$. Antw. $\frac{5}{6}+\frac{4}{5}=1\frac{19}{30}$ Ellen messen beide Reste.

5) Jemand will einen Obstgarten anlegen und bestimmt hiezu 3 an einander liegende Grundstücke. Das eine Grundstück hält $\frac{2}{3}$, das andere $\frac{4}{5}$ und das dritte $\frac{3}{4}$ bayerische Tagwerk; wie groß wird der Obstgarten werden? Berechnung: Das Produkt sämmtlicher Nenner ist der Hauptnenner, nämlich $3\times5\times4=60$. — $\frac{2}{3}=\frac{40}{60}$, $\frac{4}{5}=\frac{48}{60}$, $\frac{3}{4}=\frac{45}{60}$; $\frac{40}{60}+\frac{48}{60}+\frac{45}{60}=\frac{133}{60}=2\frac{13}{60}$. Antw. Der Garten hält ($\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=$) $2\frac{13}{60}$ bayerische Tagwerke.

6) Beda hat in seiner Sparkasse $3\frac{2}{5}$ fl., und erhält zu seinem Namenstage von seinem Vater $\frac{5}{6}$ fl. und von seiner Mutter $\frac{7}{10}$ fl.; wie groß ist nun seine Baarschaft? Berechnung: Hauptnenner ist 30. — $\frac{2}{5}=\frac{12}{30}$, $\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$, $\frac{7}{10}=\frac{21}{30}$; $\frac{12}{30}+\frac{25}{30}+\frac{21}{30}=\frac{58}{30}=1\frac{28}{30}=1\frac{14}{15}$; $3+1\frac{14}{15}=4\frac{14}{15}$. Antw. Es ist ($3\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{7}{10}=$) $4\frac{14}{15}$ fl. dessen ganze Baarschaft.

7) Ein Reisender legte am ersten Tage $4\frac{1}{2}$ Meilen, am zweiten $5\frac{1}{3}$ Meilen und am dritten $3\frac{7}{12}$ Meilen Weges zurück; wie viele Meilen machte derselbe in diesen drei Tagen? Berechnung: $4+5+3=12$. Der gemeinschaftliche Nenner für die Brüche ist 12. — $\frac{1}{2}=\frac{6}{12}$, $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$; $\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{7}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$; $12+1\frac{5}{12}=13\frac{5}{12}$. Antw. ($4\frac{1}{2}+5\frac{1}{3}+3\frac{7}{12}=$) $13\frac{5}{12}$ Meilen legte der Reisende während 3 Tage zurück.

8) Zu einem Gastmahle werden bestellt $9\frac{3}{4}$ ℔. Zucker, $7\frac{2}{3}$ ℔. Kaffee, $15\frac{5}{8}$ ℔ Sago und $\frac{5}{6}$ ℔ Pfeffer; wie viele Pfund betrug die ganze Bestellung? Berechnung: $9+7+15=31$. Hauptnenner ist 24. — $\frac{3}{4}=\frac{18}{24}$, $\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$, $\frac{5}{8}=\frac{15}{24}$, $\frac{5}{6}=\frac{20}{24}$; $\frac{18}{24}+\frac{16}{24}+\frac{15}{24}+\frac{20}{24}=\frac{69}{24}=2\frac{21}{24}=2\frac{7}{8}$; $31+2\frac{7}{8}=33\frac{7}{8}$. Antwort. Die ganze Bestellung betrug also ($9\frac{3}{4}+7\frac{2}{3}+15\frac{5}{8}+\frac{5}{6}=$) $33\frac{7}{8}$ ℔.

Der Lehrer gebe viele solche Aufgaben mit unbenannten und benannten (angewandten) Bruchzahlen zur mündlichen Uebung, und als stille Beschäftigung der Schüler lasse er Reihen bilden nach folgenden Beispielen:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=1\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=1\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$	$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=1\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{11}{12}$
$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=1\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=1\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$
$\frac{1}{2}+\frac{4}{5}=1\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}+\frac{4}{5}=1\frac{2}{15}$	$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=1\frac{7}{15}$	$\frac{1}{4}+\frac{4}{5}=1\frac{1}{20}$
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

Aufgaben.

1) Zähle zusammen: a) $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{4}$; c) $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{5}$; d) $\frac{1}{6}$ und $\frac{5}{6}$; e) $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{8}$; f) $\frac{7}{10}$ und $\frac{9}{10}$; g) $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$ und $\frac{9}{12}$; h) $\frac{13}{15}$, $\frac{11}{15}$ und $\frac{8}{15}$; i) $\frac{12}{13}$, $\frac{9}{13}$ und $\frac{10}{13}$!

2) Zähle zusammen: a) $\frac{1}{5}$ und $2\frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{3}$ und $4\frac{2}{3}$; c) $\frac{5}{8}$ und $3\frac{3}{8}$; d) $\frac{5}{7}$ und $4\frac{6}{7}$; e) $\frac{3}{5}$ und $7\frac{4}{5}$; f) $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$ und $2\frac{5}{6}$; g) $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{9}$ und $3\frac{8}{9}$!

3) Zähle zusammen: a) $1\frac{1}{2}$ und $3\frac{1}{2}$; b) $2\frac{1}{3}$ und $3\frac{2}{3}$; c) $3\frac{3}{4}$ und $2\frac{3}{4}$; d) $2\frac{5}{8}$ und $4\frac{7}{8}$; e) $5\frac{1}{4}$ und $3\frac{3}{4}$; f) $2\frac{7}{10}$, $3\frac{1}{10}$ und $4\frac{9}{10}$; g) $3\frac{5}{7}$, $5\frac{4}{7}$ und $7\frac{6}{7}$; h) $1\frac{5}{12}$, $2\frac{7}{12}$ und $3\frac{11}{12}$!

4) Zähle zu $\frac{1}{2}$ folgende Brüche einzeln, und gib an, was es immer macht: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$!

5) Wie viel macht es jedes Mal, wenn du zu $\frac{3}{4}$ einzeln zählst $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{13}{16}$, $\frac{9}{20}$; $1\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{2}$, $4\frac{5}{8}$, $6\frac{7}{10}$, $5\frac{5}{12}$?

6) Zähle zusammen: a) $1\frac{1}{2}$ und $2\frac{1}{3}$; b) $3\frac{1}{4}$ und $4\frac{1}{5}$; c) $3\frac{2}{3}$ und $2\frac{1}{4}$; d) $4\frac{3}{4}$ und $3\frac{5}{8}$; e) $2\frac{3}{5}$ und $3\frac{7}{10}$; f) $3\frac{5}{6}$ und $2\frac{3}{4}$; g) $3\frac{5}{8}$ und $5\frac{2}{3}$; h) $4\frac{3}{5}$ und $3\frac{5}{8}$; i) $2\frac{5}{6}$ und $3\frac{6}{7}$!

7) Was macht je zusammen: a) $\frac{1}{2}$ von 1 und $\frac{1}{3}$ von 1; b) $\frac{1}{3}$ von 4 und $\frac{1}{4}$ von 5; c) $\frac{1}{5}$ von 4 und $\frac{1}{3}$ von 6; d) $\frac{1}{5}$ von 3 und $\frac{1}{10}$ von 8; e) $\frac{1}{4}$ von 7 und $\frac{1}{5}$ von 12; f) $\frac{1}{6}$ von 9 und $\frac{1}{8}$ von 11; g) $\frac{1}{8}$ von 7 und $\frac{1}{9}$ von 13; h) $\frac{1}{7}$ von 9 und $\frac{1}{12}$ von 17?

8) Addire: a) $5\frac{3}{8}$ und $7\frac{4}{5}$; b) $\frac{1}{4}$ von 7 und $7\frac{5}{6}$; c) $6\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{9}$ von 16; d) $\frac{1}{7}$ von 11 und $\frac{1}{10}$ von 23; e) $2\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{2}$ und $7\frac{4}{5}$; f) $2\frac{4}{5}$, $3\frac{5}{6}$ und $\frac{1}{3}$ von 8; g) $\frac{1}{7}$ von 21, $\frac{1}{5}$ von 14 und $5\frac{5}{6}$; h) $3\frac{7}{12}$, $5\frac{7}{8}$ und $8\frac{9}{10}$!

9) Ernst hat in seiner Sparbüchse bereits $\frac{3}{4}$ fl. und erhält zu seinem Geburtstage wieder $\frac{2}{3}$ fl.; wie groß ist jetzt seine Baarschaft?

10) Emma kaufte sich um $\frac{3}{5}$ fl. Strickgarn und um $\frac{1}{6}$ fl. Nähzwirn; wie groß war ihre Ausgabe?

11) Ida wurde in einen Kramladen geschickt, um $\frac{5}{8}$ ℔ Kaffee und $\frac{3}{4}$ ℔ Zucker zu holen; wie viel beträgt das Gewicht zusammen?

12) Traugott ist $6\frac{1}{2}$ Jahre alt; wie alt wird er in $\frac{3}{4}$ Jahren sein?

13) Frida braucht zu einem Oberkleide $5\frac{4}{5}$ Ell. Zeug und zu einer Schürze $\frac{5}{6}$ Ell.; wie viel Ellen Zeug sind dies zusammen?

14) Bei einem Gastmahle brauchte man $5\frac{3}{4}$ Eimer Braunbier und $2\frac{4}{5}$ Eimer Weißbier; wie viel Eimer Bier im Ganzen?

15) Erich hat $1\frac{11}{12}$ fl. und gewinnt dazu noch $\frac{1}{8}$ von 5 fl.; wie viele Gulden besitzt er jetzt?

16) Ein Bäcker mischt an $5\frac{9}{10}$ Metzen Roggenmehl $3\frac{5}{6}$ Metzen Gerstenmehl; wie viele Metzen beträgt das Gemenge?

17) Ein Schneider verlangt zu einem Rocke $4\frac{1}{3}$ Ellen, zu Beinkleidern $2\frac{3}{4}$ Ell. und zu einer Weste $\frac{7}{8}$ Ellen desselben Zeuges; wie viel Ellen Zeug muß man demselben schicken?

18) Ein Bauer hat drei Aecker; der 1. hält 5, der 2. 9 und der 3. 13 Tagwerke. Er baut vom 1. $\frac{1}{6}$, vom 2. $\frac{1}{4}$ und vom 3. $\frac{1}{2}$ mit Gerste an; wie viele Tagwerke sind im Ganzen mit Gerste bebaut worden?

19) Eine Frau brachte auf den Markt $2\frac{3}{4}$ Maß Rahm und $7\frac{1}{2}$ Maß Milch; sie verkaufte Beides und bekam für den Rahm $15\frac{5}{8}$ kr. und für die Milch $16\frac{3}{4}$ kr.; wie viele Maß hat sie überhaupt zu Markte gebracht? und wie viel Geld dafür eingenommen?

20) In einer Haushaltung wurden im 1. Monate $3\frac{7}{8}$ ℔ Lichte, im 2. $1\frac{3}{4}$ ℔ mehr als im ersten und im 3. $1\frac{2}{3}$ ℔ mehr als im zweiten Monate verbraucht; wie viele Pfund Lichte wurden in diesen drei Monaten zusammen verbraucht?

b) Schriftliche Darstellung.

Die folgenden vollständig berechneten und erklärten Beispiele lehren die Darstellung und das schriftliche Verfahren für das Zusammenzählen der Brüche.

1. Zusammenzählen gleichnamiger Brüche.

Beispiele.

1) Zähle zusammen $\frac{7}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{14}{15}$ und $\frac{13}{15}$!

Darstellung und Berechnung:

$^{7}/_{15}$	7
$^{4}/_{15}$	4
$^{14}/_{15}$	14
$^{13}/_{15}$	13
$2^{8}/_{15}$	$^{38}/_{15} = 2^{8}/_{15}$

Erklärung über das Verfahren.

Die gegebenen Brüche setzt man unter einander, zieht hierauf rechts einen senkrechten Strich, neben welchen die Zähler besonders angeschrieben werden, addirt sie wie ganze Zahlen, setzt die Summe (38) unter den Querstrich mit dem gemeinschaftlichen Nenner (15), zieht die Ganzen heraus, indem man mit dem Nenner in den Zähler dividirt, und schreibt dann die Summe unter die durch den Querstrich abgesonderten Summanden.

Antwort: Die Brüche machen zusammen $2^{8}/_{15}$.

2) Was geben zusammen $2^{5}/_{17}$, $9^{13}/_{17}$, $26^{8}/_{17}$, $41^{16}/_{17}$ und $^{11}/_{17}$?

Darstellung u. Berechnung:

$3^{5}/_{17}$	5
$9^{13}/_{17}$	13
$26^{8}/_{17}$	8
$41^{16}/_{17}$	16
$^{11}/_{17}$	11
$82^{2}/_{17}$	$^{53}/_{17} = 3^{2}/_{17}$

Erklärung.

Die Summanden werden wieder unter einander gesetzt und sodann zuerst die Brüche für sich, wie oben behandelt. Die aus den Brüchen sich ergebenden Ganzen zählt man zu den Ganzen und schreibt die Summe sammt dem verbleibenden Bruch unter den Querstrich.

Die gegebenen Bruchzahlen machen zusammen $82^{2}/_{17}$.

2. Zusammenzählen ungleichnamiger Brüche.

Beispiele.

1) $^{2}/_{3}$, $^{1}/_{6}$, $^{5}/_{8}$, $^{3}/_{4}$ und $^{7}/_{9}$ machen wie viel zusammen?

Darstellung u. Berechnung:

	72
$^{2}/_{3}$	$24 \times 2 = 48$
$^{1}/_{6}$	$12 \times 1 = 12$
$^{5}/_{8}$	$9 \times 5 = 45$
$^{3}/_{4}$	$18 \times 3 = 54$
$^{7}/_{9}$	$8 \times 7 = 56$
$2^{71}/_{72}$	$72 : 215 = 2^{71}/_{72}$
	144
	$-^{71}/_{72}$

Erklärung.

Da man ungleichnamige Brüche nicht zusammenzählen kann, so hat man diese zuerst gleichnamig zu machen. Wie die Brüche gleichnamig gemacht werden, ist aus dem schriftlichen Verfahren der Vorübungen (S. 66. ff.) bekannt.

Der kleinste gemeinschaftliche Hauptnenner ist 72, der oben über einen kleinen Querstrich der Bruchsäule gesetzt wird. — Der Ansatz und die weitere Behandlung der gleichnamig gemachten Brüche ist dem vorigen Verfahren gleich, wie die Darstellung zeigt. Antwort: Obige Brüche betragen $2^{71}/_{72}$.

2) Addire $4^{1}/_{2}$, $7^{5}/_{8}$, $9^{2}/_{3}$, $5^{31}/_{48}$ und $8^{11}/_{12}$!

Darstellung u. Berechnung:

	48
$4^{1}/_{2}$	$24 \times 1 = 24$
$7^{5}/_{8}$	$6 \times 5 = 30$
$9^{2}/_{3}$	$16 \times 2 = 32$
$5^{31}/_{48}$	$1 \times 31 = 31$
$8^{11}/_{12}$	$4 \times 11 = 44$
$36^{17}/_{48}$	$48 : 161 = 3^{17}/_{48}$
	144
	$-^{17}/_{48}$

Erklärung.

Der größte Nenner aus den gegebenen Brüchen wird als Hauptnenner beibehalten, unter welche Benennung nun die übrigen Brüche gebracht, die Zähler addirt und die Ganzen herausgezogen werden. Diese Ganzen zählt man zu den ganzen Summanden und setzt der Summe den etwa verbleibenden Bruch bei.

Antw.: Obige Bruchzahlen machen $36^{17}/_{48}$.

3) $897^5/_8$, $1706^3/_5$, $2957^7/_{12}$, $498^2/_3$, $576^5/_9$ und $93^1/_8$ gibt welche Summe?

Darstellung u. Berechnung:

	360
$897^5/_8$	$45 \times 5 = 225$
$1706^3/_5$	$72 \times 3 = 216$
$2957^7/_{12}$	$30 \times 7 = 210$
$498^2/_3$	$120 \times 2 = 240$
$576^5/_9$	$40 \times 5 = 200$
$93^1/_8$	$45 \times 1 = 45$
$6730^7/_{45}$	$360 : 1136 = 3^{56}/_{360} = 3^7/_{45}$.

Erklärung.

Wie der kleinste gemeinschaftliche Nenner gefunden wird, ist bekannt, derselbe ist 360. Die Berechnung ist wie bei den vorigen Beispielen. Läßt sich der verbleibende Bruch kürzen, wie hier, so geschieht dieses, und es wird der gekürzte Bruch der Summe beigefügt.

Antwort: Obige Posten geben die Summe $6730^7/_{45}$.

3) Zusammenzählen angewandter Bruchzahlen.

Beispiele.

1) In einer Gastwirthschaft verbrauchte man in einem Monate $14^5/_8$ ℔ Kaffee, $26^7/_8$ ℔ Zucker, $31^3/_8$ ℔ Reiß, $19^1/_8$ ℔ Sago und $^7/_8$ ℔ Gewürz; wie viel Pfund wogen sämmtliche verbrauchte Spezereien?

Darstellung u. Berechg:

	℔	
Kaffee	$14^5/_8$	5
Zucker	$26^7/_8$	7
Reiß	$31^3/_8$	3
Sago	$19^1/_8$	1
Gewürz	$^7/_8$	7
Sum.	$92^7/_8$	$^{23}/_8 = 2^7/_8$.

Die Ausführung ist bekannt. —

Beantwortung: Sämmtlich verbrauchte Spezereien wogen $92^7/_8$ ℔.

2) Ernst braucht für die Schule a) ein Lesebuch, b) einen Katechismus, c) eine Landkarte, d) eine Rechentafel, e) Papier zu Schreibheften, f) Schreibfedern und g) Bleistifte. a) kostet $^3/_{10}$ fl., b) $^5/_{12}$ fl., c) $^2/_3$ fl., d) $^3/_5$ fl., e) $^1/_6$ fl., f) $^4/_{15}$ fl. und g) $^3/_{20}$ fl.; um wie viel Geld muß Ernst seinen Vater bitten?

Darstellung und Berechnung:

fl.	60
a) $^3/_{10}$	$6 \times 3 = 18$
b) $^5/_{12}$	$5 \times 5 = 25$
c) $^2/_3$	$20 \times 2 = 40$
d) $^3/_5$	$12 \times 3 = 36$
e) $^1/_6$	$10 \times 1 = 10$
f) $^4/_{15}$	$4 \times 4 = 16$
g) $^3/_{20}$	$3 \times 3 = 9$
$2^{34}/_{60}$	$60 : 154 = 2^{34}/_{60}$.
	120
	$^{34}/_{60}$

Oder kürzer:

fl.	60
a) $^3/_{10}$	18
b) $^5/_{12}$	25
c) $^2/_3$	40
d) $^3/_5$	36
e) $^1/_5$	10
f) $^4/_{15}$	16
g) $^3/_{20}$	9
Sum. $2^{17}/_{30}$	$^{154}/_{60} = 2^{34}/_{60} = 2^{17}/_{30}$ fl.

Die Brüche müssen zuerst gleichnamig gemacht werden. Die Ausführung ist bekannt.

Beantwortung: Ernst hat seinen Vater um $2^{34}/_{60}$ fl. $= 2^{17}/_{30}$ fl. zu bitten.

3) Ein Gutsbesitzer vereinnahmte im verflossenen Jahre für verkaufte Fruchtsorten, und zwar für $35\frac{5}{8}$ Schfl. Weizen $527\frac{1}{4}$ fl., für $26\frac{5}{6}$ Schfl. Roggen $313\frac{1}{18}$ fl., für $48\frac{3}{4}$ Schfl. Gerste $418\frac{7}{16}$ fl., für $56\frac{2}{3}$ Schfl. Haber $247\frac{11}{12}$ fl., für $7\frac{7}{12}$ Schfl. Erbsen $131\frac{19}{20}$ fl. und für $\frac{4}{5}$ Schfl. Leinsamen $20\frac{8}{15}$ fl. — Es frägt sich: a) Wie viele Schäffel sämmtlicher Fruchtsorten hat der Gutsbesitzer verkauft? und b) wie viel Geld hat er im Ganzen eingenommen?

Darstellung und Berechnung.

Ad a.	Schfl.	120
Weizen	$35\frac{5}{8}$	75
Roggen	$26\frac{5}{6}$	100
Gerste	$48\frac{3}{4}$	90
Haber	$56\frac{2}{3}$	80
Erbsen	$7\frac{7}{12}$	70
Lein	$\frac{4}{5}$	96
Sum.	$176\frac{31}{120}$	$\frac{511}{120} = 4\frac{31}{120}$

Ad b.	fl.	720
Weizen	$527\frac{1}{4}$	$180 \times 1 = 180$
Roggen	$313\frac{1}{18}$	$40 \times 1 = 40$
Gerste	$418\frac{7}{16}$	$45 \times 7 = 315$
Haber	$247\frac{11}{12}$	$60 \times 11 = 660$
Erbsen	$131\frac{19}{20}$	$36 \times 19 = 684$
Lein	$20\frac{8}{15}$	$48 \times 8 = 384$
Sum.	$1659\frac{103}{720}$	$720 : 2263 = 3\frac{103}{720}$.
		2160
		$-\frac{103}{720}$

Die Ausführung wie oben.

Beantwortung: Ad a. Der Gutsbesitzer hat im Ganzen $176\frac{31}{120}$ Schfl. Früchte verkauft, und b. dafür $1659\frac{103}{720}$ fl. eingenommen.

Aufgaben.

1) Zähle zusammen $\frac{19}{27}$, $\frac{11}{27}$, $\frac{26}{27}$, $\frac{8}{27}$, $\frac{16}{27}$, $\frac{25}{27}$ und $\frac{13}{27}$!

2) Was machen zusammen $17\frac{5}{31}$, $9\frac{18}{31}$, $12\frac{30}{31}$, $25\frac{16}{31}$ und $\frac{29}{31}$?

3) Wie viel sind $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{13}{16}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{23}{24}$ und $\frac{37}{48}$?

4) Addire $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{13}{14}$ und $\frac{19}{21}$!

5) Wie viel betragen $9\frac{53}{72}$, $31\frac{47}{48}$, $137\frac{5}{36}$, $8\frac{171}{288}$, $96\frac{11}{12}$, und $257\frac{107}{144}$?

6) Es sind $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{16}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{13}{24}$, $\frac{7}{12}$ Fuß; wie viele Fuß?

7) $\frac{4}{5}$, $\frac{23}{40}$, $\frac{19}{30}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{14}{15}$, $\frac{49}{60}$, $\frac{7}{10}$ und $\frac{31}{50}$ Ellen sind zusammen wie viele Ellen?

8) Wie viele Zentner machen zusammen $4\frac{13}{15}$, $6\frac{7}{8}$, $9\frac{14}{25}$, $10\frac{7}{10}$, $13\frac{15}{32}$ und $27\frac{18}{35}$ Ztr.?

9) $36\frac{2}{3}$, $41\frac{5}{6}$, $20\frac{7}{16}$, $39\frac{17}{40}$, $22\frac{17}{25}$, $8\frac{7}{12}$ Meilen, wie viel?

10) $9\frac{7}{8}$, $16\frac{4}{5}$, $3\frac{7}{9}$, $27\frac{4}{7}$, $6\frac{13}{30}$ und $67\frac{37}{45}$ Schäffel, wie viel?

11) Ein Kaufmann erhält 6 Ballen Tücher. Eine Balle mißt $37\frac{2}{3}$ Ell., die 2te $56\frac{5}{8}$ Ell., die 3te $40\frac{3}{5}$ Ell., die 4te $62\frac{5}{6}$ Ell., die 5te $46\frac{11}{12}$ Ell. und die 6te $57\frac{3}{4}$ Ell.; wie viele Ellen sind es zusammen?

12) In einer Haushaltung braucht man nach und nach $11\frac{3}{5}$ ℔, $13\frac{5}{8}$ ℔, $9\frac{6}{7}$ ℔, $10\frac{5}{16}$ ℔, $7\frac{2}{3}$ ℔, $8\frac{17}{20}$ ℔ Zucker; wie viele Pfund beträgt dies?

13) Ein Hausbesitzer verstiftet 8 Wohnzimmer, a) zu $37\frac{2}{3}$ fl., b) zu $26\frac{4}{5}$ fl., c) zu $42\frac{5}{8}$ fl., d) zu $31\frac{5}{6}$ fl., e) zu $23\frac{7}{16}$ fl., f) zu $19\frac{11}{20}$ fl., g) zu $21\frac{5}{12}$ fl. und h) zu $18\frac{25}{32}$ fl. Jahres-Miethzins; wie viel Miethzins nimmt er jährlich ein?

14) Ein Großgut-Besitzer hat jährlich an Gilt an das Rentamt abzuführen $37\frac{5}{6}$ Schfl. Weizen, $29\frac{11}{16}$ Schfl. Roggen, $57\frac{17}{20}$ Schfl. Gerste, $69\frac{13}{15}$ Schfl. Haber, $17\frac{4}{5}$ Schfl. Erbsen und $3\frac{19}{24}$ Schfl. Hanfsamen; wie viel Schfl. im Ganzen?

15) Eine Großhandlung versendet $276\frac{13}{15}$ Ztr. Kaffee, $358\frac{21}{25}$ Ztr. Zucker, $179\frac{5}{8}$ Ztr. Reiß, $99\frac{7}{12}$ Ztr. Sago, $27\frac{31}{40}$ Ztr. Pfeffer, $9\frac{17}{32}$ Ztr. Gewürznelken und $\frac{17}{18}$ Ztr. Safran; wie viele Zentner wurden im Ganzen versendet?

16) Ich habe mir vier Zahlen gedacht. Die erste ist $12\frac{1}{2}$, die zweite $4\frac{2}{3}$ mehr als die erste, die dritte ist $3\frac{1}{2}$ mehr als die zweite, und die vierte ist um $3\frac{3}{4}$ größer als die dritte; welche Zahlen habe ich mir gedacht? und wie groß ist ihre Summe?

17) Ein Winzer legte einen Weinberg neu an und erzielte das erste Mal $7\frac{5}{8}$ Eimer Wein; im folgenden Jahre darauf bekam er $3\frac{2}{3}$ Eimer mehr, im 3ten $4\frac{11}{15}$ Eimer mehr, als im vorhergehenden, und im 4ten $5\frac{9}{10}$ Eimer mehr als im 3ten; wie viel Eimer Wein lieferte der Weinberg in diesen 4 Jahren?

18) Es kauft sich Jemand 6 Aecker: a) hält $7\frac{7}{10}$ Tagwerke, b) $9\frac{5}{7}$ Tgw.; c) $5\frac{3}{8}$ Tgw., d) $11\frac{5}{6}$ Tgw., e) $6\frac{4}{5}$ Tgw. und f) $\frac{13}{18}$ Tgw.; wie viele Tgw. zusammen?

19) Herr B. hatte bei Erbauung seines Hauses folgende Ausgaben gehabt: für die Baustelle $792\frac{1}{2}$ fl., die Zimmerleute hatten erhalten $256\frac{5}{6}$ fl., die Maurer $395\frac{3}{4}$ fl., die Steinhauer und Arbeiter in der Steingrube $139\frac{2}{3}$ fl., die Schreiner $247\frac{4}{5}$ fl., die Schlosser und Schmiede $215\frac{7}{8}$ fl., der Glaser $69\frac{5}{12}$ fl., die Fuhrleute $197\frac{7}{10}$ fl., für Baumaterialien $2769\frac{14}{15}$ fl., Nebenausgaben $47\frac{7}{9}$ fl.; wie theuer kam ihm das Haus zu stehen?

20) Ein Oekonom verkauft a) $7\frac{5}{6}$ Schfl. Kern zu $123\frac{5}{8}$ fl., b) $13\frac{3}{4}$ Schfl. Roggen zu $141\frac{19}{32}$ fl., c) $28\frac{2}{3}$ Schfl. Gerste zu $267\frac{4}{15}$ fl., d) $19\frac{7}{10}$ Schfl. Haber zu $89\frac{11}{12}$ fl. und e) $67\frac{1}{2}$ Schfl. Kartoffel zu $235\frac{17}{24}$ fl. Es frägt sich: a) Wie viel Schäffel Früchte hat er verkauft? und b) wie viel Geld dafür eingenommen?

II. Abziehen.

a) Mündliche Uebung.

1. Abziehen gleichnamiger Brüche.

Beispiele.

1) Nimm 3 Achtel von 5 Achtel hinweg und gib an, wie viel Achtel noch bleiben!

Berechnung: 3 Achtel von 5 Achtel hinweg, bleiben noch 2 Achtel. Oder: $5 - 3 = 2$, d. i. 2 Achtel. ($\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.)

2) Ziehe ab $\frac{5}{9}$ von $\frac{7}{9}$!

Berechnung: $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$. Also $\frac{5}{9}$ von $\frac{7}{9}$ bleibt $\frac{2}{9}$.

3) $\frac{11}{12}$ weniger $\frac{5}{12}$ ist wie viel?

Berechnung: $\frac{11}{12} - \frac{5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Es ist also $\frac{11}{12} - \frac{5}{12} = \frac{6}{12}$, und $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Aus diesen Beispielen ergibt sich die Regel: Da beim Abziehen gleichnamiger Brüche die Namen der Theile oder die Nenner dieselben bleiben, so hat man es nur mit den Zählern allein zu thun, die eben so behandelt werden, als wären es ganze Zahlen, d. h. man zieht den Zähler des Subtrahenden von dem Zähler des Minuenden ab und gibt dem Reste den gemeinschaftlichen Nenner zum Nenner; läßt sich der Rest kürzen, so geschieht dieses.

4) Was bleibt, wenn man $\frac{2}{5}$ von 1 abzieht?

Berechnung: $1 = \frac{5}{5}$; $\frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$. Also ist $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

5) Ziehe $\frac{5}{8}$ von 4 ab!

Berechnung: $4 = 3 + 1$; $1 = \frac{8}{8}$; also $4 = 3 + \frac{8}{8}$ oder $4 = 3\frac{8}{8}$. $\frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$; $\frac{3}{8} + 3 = 3\frac{3}{8}$. Oder: $1 = \frac{8}{8}$; $4 = \frac{4 \times 8}{8} = \frac{32}{8}$; $\frac{32}{8} - \frac{5}{8} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$. Es ist also $4 - \frac{5}{8} = 3\frac{3}{8}$.

Daraus folgt die Regel: Soll ein Bruch von einer ganzen Zahl abgezogen werden, so nimmt man von dieser eine Einheit (1) hinweg, löſ't diese in einen uneigentlichen Bruch auf, dessen Nenner dem Nenner

des abzuziehenden Bruches gleich ist; — oder man verwandelt die ganze Zahl in einen mit dem gegebenen Bruche gleichnamigen, indem man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches multiplizirt und dem Produkte den Nenner des Bruches ebenfalls zum Nenner gibt, — und verfährt dann wie vorher. Bleibt, wie im letztern Falle, ein unächter Bruch zum Rest, so werden die Ganzen herausgezogen.

6) Was bleibt, wenn man $^4/_9$ von $3^4/_9$ hinwegnimmt!
Berechnung: $3^4/_9 - ^4/_9 = 3$; denn $^4/_9 - ^4/_9 = 0$, folglich bleibt noch 3. Oder: $3^4/_9 = ^{31}/_9$; $^{31}/_9 - ^4/_9 = ^{27}/_9 = 3$. Also ist $3^4/_9 - ^4/_9 = 3$.

7) Wie viel ist $5^7/_8$ weniger $^5/_8$?
Berechnung: $5^7/_8 - ^5/_8 = 5^2/_8 = 5^1/_4$; denn $^7/_8 - ^5/_8 = ^2/_8 = ^1/_4$; $^1/_4 + 5 = 5^1/_4$. Oder: $5^7/_8 = ^{47}/_8$; $^{47}/_8 - ^5/_8 = ^{42}/_8 = 5^2/_8 = 5^1/_4$. Also $5^7/_8 - ^5/_8 = 5^1/_4$.

8) $1^1/_6$ weniger $^5/_6$ ist wie viel?
Berechnung: $^5/_6$ kann von $^1/_6$ nicht abgezogen werden; man muß daher das Ganze (1) der gemischten Zahl auch in Sechstel verwandeln, d. h. die gemischte Zahl auflösen. $1^1/_6 = 1 + ^1/_6$; $1 = ^6/_6$; $^6/_6 + ^1/_6 = ^7/_6$; $^7/_6 - ^5/_6 = ^2/_6 = ^1/_3$. Es ist also $1^1/_6 - ^5/_6 = ^1/_3$. Oder: $1^1/_6 - ^5/_6 = ^7/_6 - ^5/_6 = ^2/_6 = ^1/_3$.

9) Ziehe ab $^4/_5$ von $7^3/_5$!
Berechnung: Da $^4/_5$ von $^3/_5$ allein nicht hinweggenommen werden können, so nimmt man von den 7 eine Einheit (1) ab und verwandelt diese in Fünftel, wozu noch die 3 Fünftel kommen, und zieht dann ab, wie vor; oder man löſ't die gemischte Zahl in einen unächten Bruch auf. $7^3/_5 = 7 + ^3/_5$; $7 - 1 = 6$; $1 = ^5/_5$; $^5/_5 + ^3/_5 = ^8/_5$; $^8/_5 - ^4/_5 = ^4/_5$; $^4/_5 + 6 = 6^4/_5$. Oder: $7^3/_5 = ^{38}/_5$; $^{38}/_5 - ^4/_5 = ^{34}/_5 = 6^4/_5$. Es ist also $7^3/_5 - ^4/_5 = 6^4/_5$.

Daraus die Regel: Soll ein Bruch von einer gemischten Zahl abgezogen werden, so zieht man den Bruch von dem Bruche der gemischten Zahl ab, wenn es angeht. Ist jedoch der Subtrahend größer als der gleichnamige Bruch des Minuenden, so nimmt man eine Einheit (1) von der ganzen Zahl hinweg, macht sie mit dem Bruche gleichnamig, addirt diesen dazu und zieht sodann ab. Oder: Man löset die gemischte Zahl in einen unächten Bruch auf und zieht von dem Zähler des Minuenden den Zähler des Subtrahenden ab; bleibt ein uneigentlicher oder unächter Bruch zum Rest, so zieht man die Ganzen heraus.

10) Ziehe $4^2/_3$ ab von 9!
Berechn.: $9 = 8 + 1$; $1 = ^3/_3$; $^3/_3 - ^2/_3 = ^1/_3$; $8 - 4 = 4$; $4 + ^1/_3 = 4^1/_3$. Oder: $4^2/_3 = ^{14}/_3$; $9 = \frac{9 \times 3}{3} = ^{27}/_3$; $^{27}/_3 - ^{14}/_3 = ^{13}/_3 = 4^1/_3$. Also $9 - 4^2/_3 = 4^1/_3$.

Daraus ergibt sich die Regel: Soll eine gemischte Zahl von einer ganzen abgezogen werden, so zieht man zuerst den Bruch nach der zum 4. und 5. Beispiele gegebenen Regel ab, und sodann noch die Ganzen der gemischten Zahl; oder man macht Minuend und Subtrahend gleichnamig und verfährt wie vorher.

11) Was bleibt, wenn man $3^2/_9$ von $8^7/_9$ abzieht?
Berechnung: $^7/_9 - ^2/_9 = ^5/_9$; $8 - 3 = 5$; $^5/_9 + 5 = 5^5/_9$. Oder: $8^7/_9 = ^{79}/_9$; $3^2/_9 = ^{29}/_9$; $^{79}/_9 - ^{29}/_9 = ^{50}/_9 = 5^5/_9$. Es ist also $8^7/_9 - 3^2/_9 = 5^5/_9$.

12) Wie viel ist $13^3/_8$ weniger $5^7/_8$?
Berechnung: $13^3/_8 = 12 + ^8/_8 + ^3/_8$; $^8/_8 + ^3/_8 = ^{11}/_8$; $^{11}/_8 - ^7/_8 = ^4/_8 = ^1/_2$; $12 - 5 = 7$; $^1/_2 + 7 = 7^1/_2$. Oder: $13^3/_8 = ^{107}/_8$; $5^7/_8 = ^{47}/_8$; $^{107}/_8 - ^{47}/_8 = ^{60}/_8 = 7^4/_8 = 7^1/_2$. Es ist somit $13^3/_8 - 5^7/_8 = 7^1/_2$.

Daraus folgt die Regel: Soll eine gemischte Zahl von einer gemischten Zahl abgezogen werden, so zieht man zuerst den Bruch von dem Bruche ab, wenn es angeht; wenn nicht, so nimmt man eine Einheit (1) von dem Ganzen des Minuenden ab, macht sie mit dem Bruche gleichnamig, addirt diesen hinzu und zieht sodann ab. Ist dieses geschehen, so zieht man auch die Ganzen des Subtrahenden von den Ganzen des Minuenden ab und fügt diesem Reste den verbliebenen Bruchrest bei. Oder: Man macht beide gemischte Zahlen gleichnamig, d. h. man löset sie auf, bewerkstelligt das Abziehen und zieht aus dem Reste die Ganzen heraus, wenn ein unächter Bruch zum Reste bleibt.

2. Abziehen ungleichnamiger Brüche.

Beispiele.

1) Ziehe $^1/_3$ ab von $^1/_2$; was bleibt dann noch?

1 Drittel kann von 1 Halben so nicht unmittelbar abgezogen werden, weil nur Gleichbenanntes von Gleichbenanntem sich subtrahiren läßt. Es müssen daher beide Brüche, wie beim Addiren, erst gleichnamig gemacht werden. Ist dieses geschehen, so verfährt man dann ebenso, wie oben bei gleichnamig gegebenen Brüchen gezeigt worden ist. Das Gleichnamigmachen der Brüche ist bekannt. (Siehe Seite 39 ff. u. 66 ff.)
Berechnung: $^1/_3$ und $^1/_2$ lassen sich in 6tel verwandeln. $^1/_3 = ^2/_6$; $^1/_2 = ^3/_6$; $^3/_6 - ^2/_6 = ^1/_6$. Also ist $^1/_2 - ^1/_3 = ^1/_6$, d. h. es bleibt $^1/_6$.

2) Was bleibt, wenn man $^1/_4$ von $^3/_5$ abzieht?
Berechnung: $^1/_4$ und $^3/_5$ müssen zuerst gleichnamig gemacht werden. Beide Brüche lassen sich in 20stel auflösen. $^1/_4 = ^5/_{20}$; $^1/_5 = ^4/_{20}$; $^3/_5 = \frac{4 \times 3}{20} = ^{12}/_{20}$; $^{12}/_{20} - ^5/_{20} = ^7/_{20}$. Also $^3/_5 - ^1/_4 = ^7/_{20}$.

3) Ziehe ab $^7/_{12}$ von $^5/_6$!
Berechnung: $^5/_6$ lassen sich ebenfalls in 12tel verwandeln. $^5/_6 = ^{10}/_{12}$; $^{10}/_{12} - ^7/_{12} = ^3/_{12} = ^1/_4$. Es ist also $^5/_6 - ^7/_{12} = ^1/_4$.

4) $^3/_8$ weniger als $^4/_5$ ist wie viel?
Berechnung: $^3/_8$ und $^4/_5$ lassen sich in 40stel auflösen. $^3/_8 = ^{15}/_{40}$; $^4/_5 = ^{32}/_{40}$; $^{32}/_{40} - ^{15}/_{40} = ^{17}/_{40}$. Sonach ist $^4/_5 - ^3/_8 = ^{17}/_{40}$.

5) Wie viel ist $3^3/_4$ weniger $^1/_6$?
Berechnung: Die Brüche $^3/_4$ und $^1/_6$ lassen sich in 12tel verwandeln. $^3/_4 = ^9/_{12}$; $^1/_6 = ^2/_{12}$; $^9/_{12} - ^2/_{12} = ^7/_{12}$; $^7/_{12} + 3 = 3^7/_{12}$. Oder: $3^3/_4 - ^1/_6 = ^{15}/_4 - ^1/_6 = ^{45}/_{12} - ^2/_{12}$; $^{45}/_{12} - ^2/_{12} = ^{43}/_{12} = 3^7/_{12}$. Es ist also $3^3/_4 - ^1/_6 = 3^7/_{12}$.

6) Ziehe ab $^3/_5$ von $2^5/_6$!
Berechnung: Die Brüche $^5/_6$ und $^3/_5$ können in 30stel aufgelöst werden. $\frac{5}{6} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30}$; $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 6}{5 \times 6} = \frac{18}{30}$; $^{25}/_{30} - ^{18}/_{30} = ^7/_{30}$ bleiben übrig und die 2

Ganzen. Oder: $2\frac{5}{6}=\frac{17\times5}{6\times5}=\frac{85}{30}$; $\frac{3}{5}=\frac{3\times6}{5\times6}=\frac{18}{30}$; $^{85}/_{30}-{}^{18}/_{30}={}^{67}/_{30}$ $=2^{7}/_{30}$. Es ist also $2^{5}/_{6}-{}^{3}/_{5}=2^{7}/_{30}$.

7) Was gibt $1^{1}/_{3}$ weniger $^{5}/_{6}$?
Berechnung: $^{1}/_{3}={}^{2}/_{6}$; $^{5}/_{6}$ kann von $^{2}/_{6}$ nicht abgezogen werden; man muß daher das Ganze des Minuenden (1) dazu nehmen. $1={}^{6}/_{6}$; $^{6}/_{6}+{}^{2}/_{6}={}^{8}/_{6}$; $^{8}/_{6}-{}^{5}/_{6}={}^{3}/_{6}={}^{1}/_{2}$. Oder: $1^{1}/_{3}-{}^{5}/_{8}={}^{4}/_{3}-{}^{5}/_{6}={}^{8}/_{6}-{}^{5}/_{6}={}^{3}/_{6}={}^{1}/_{2}$. Also ist $1^{1}/_{3}-{}^{5}/_{6}={}^{1}/_{2}$.

8) Wie viel ist $6^{1}/_{2}$ weniger $^{3}/_{4}$?
Berechnung: $\frac{2}{5}=\frac{2\times4}{5\times4}=\frac{8}{20}$; $\frac{3}{4}=\frac{3\times5}{4\times5}=\frac{15}{20}$. Da $^{15}/_{20}$ von $^{8}/_{20}$ nicht subtrahirt werden kann, so muß man eine Einheit (1) von den 6 Ganzen des Minuenden entlehnen, dieselbe ebenfalls in 20stel auflösen und zu den $^{8}/_{20}$ addiren, worauf dann erst der Abzug bewerkstelligt werden kann. $6-1=5$; $1={}^{20}/_{20}$; $^{8}/_{20}+{}^{20}/_{20}={}^{28}/_{20}$; $^{28}/_{20}-{}^{15}/_{20}={}^{13}/_{20}$; $^{13}/_{20}+5$ $=5^{13}/_{20}$. Oder: $6\frac{2}{5}=\frac{32}{5}=\frac{128}{20}$; $\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$; $^{128}/_{20}-{}^{15}/_{20}={}^{113}/_{20}=5^{13}/_{20}$. Also $6^{2}/_{5}-{}^{3}/_{4}=5^{13}/_{20}$.

9) Welches ist der Unterschied zwischen $8^{5}/_{6}$ und $3^{2}/_{5}$?
Berechnung: $\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$; $\frac{2}{5}=\frac{12}{30}$; $^{25}/_{30}-{}^{12}/_{30}={}^{13}/_{30}$; $8-3=5$; $^{13}/_{30}+5$ $=5^{13}/_{30}$. Oder: $8\frac{5}{6}=\frac{53}{6}=\frac{265}{30}$; $3\frac{2}{5}=\frac{17}{5}=\frac{102}{30}$; $^{265}/_{30}-{}^{102}/_{30}={}^{163}/_{30}=$ $5^{13}/_{30}$. Es ist also $8^{5}/_{6}-3^{2}/_{5}=5^{13}/_{30}$.

10) Wie viel ist $10^{3}/_{8}$ weniger $5^{2}/_{3}$?
Berechnung: $^{3}/_{8}={}^{9}/_{24}$; $^{2}/_{3}={}^{16}/_{24}$. $^{16}/_{24}$ kann man von $^{9}/_{24}$ nicht abziehen, daher entlehnt man eine Einheit (1) von 10, welche ebenfalls in 24stel aufgelöst und zu $^{9}/_{24}$ addirt wird. $10-1=9$; $1={}^{24}/_{24}$; $^{9}/_{24}+{}^{24}/_{24}={}^{33}/_{24}$; $^{33}/_{24}-{}^{16}/_{24}={}^{17}/_{24}$; $9-5=4$; $^{17}/_{24}+4=4^{17}/_{24}$. Oder: $10\frac{3}{8}=\frac{83}{8}=\frac{249}{24}$; $5\frac{2}{3}=\frac{17}{3}=\frac{136}{24}$; $^{249}/_{24}-{}^{136}/_{24}={}^{113}/_{24}=4^{17}/_{24}$. Es ist demnach $10^{3}/_{8}-5^{2}/_{3}=4^{17}/_{24}$.

Aus diesen Beispielen folgt die allgemeine Regel: Soll ein Bruch von einem ungleichnamigen Bruche abgezogen werden, so muß man beide Brüche zuerst gleichnamig machen, und behandelt dann diese nach den oben, für die zu den einzelnen Fällen gegebenen gleichbenannten Brüchen, aufgestellten Regeln.

3. Abziehen angewandter Bruchzahlen.

1) Eine Frau kaufte auf einem Markte einen Rest Zeug zu $^{7}/_{8}$ Ellen; davon verwendete sie für ihr Töchterlein zu einer Schürze $^{5}/_{8}$ Ellen; wie viel Zeug bleibt noch übrig?
Berechnung: $^{7}/_{8}-{}^{5}/_{8}={}^{2}/_{8}={}^{1}/_{4}$. Antwort: Es blieb noch $^{1}/_{4}$ Elle übrig.

2) Jemand hat $^{4}/_{5}$ fl. eingenommen und soll 3 fl. Schulden zahlen; wie viel fehlt noch zur Deckung derselben?
Berechnung: $3-{}^{4}/_{5}=2^{5}/_{5}-{}^{4}/_{5}$; $^{5}/_{5}-{}^{4}/_{5}={}^{1}/_{5}$; $^{1}/_{5}+2=2^{1}/_{5}$. Oder: $3={}^{15}/_{5}$; $^{15}/_{5}-{}^{4}/_{5}={}^{11}/_{5}=2^{1}/_{5}$. Also ist $3-{}^{4}/_{5}=2^{1}/_{5}$. — Antwort: Zur Deckung der Schulden fehlen noch $2^{1}/_{5}$ fl.

3) Ernst gibt von 9 fl. $4^5/_8$ fl. aus; wie viel bleibt ihm noch übrig? Berechnung; $9 = 8^8/_8$; $^8/_8 - ^5/_8 = ^3/_8$; $8 - 4 = 4$; $^3/_8 + 4 = 4^3/_8$. Oder: $9 = \frac{9 \times 8}{8} = ^{72}/_8$; $4^5/_8 = ^{37}/_8$; $^{72}/_8 - ^{37}/_8 = ^{35}/_8 = 4^3/_8$. Es ist also $9 - 4^5/_8 = 4^3/_8$. Antwort: Es verbleiben noch $4^3/_8$ fl.

4) Ein Kaufmann erhielt $11^3/_{10}$ Ztr. Zucker und $7^9/_{10}$ Ztr. Kaffee. a) Wie viel an Gewicht betragen die Waaren zusammen? b) wie viel mehr Zucker, als Kaffee?
Berechnung: Ad a. $11 + 7 = 18$; $^3/_{10} + ^9/_{10} = ^{12}/_{10} = 1^2/_{10} = 1^1/_5$; $18 + 1^1/_5 = 19^1/_5$ Ztr. Ad b. Da $^9/_{10}$ von $^3/_{10}$ nicht abgezogen werden kann, so muß man von den 11 Ztr. 1 Ztr. hinwegnehmen und diesen ebenfalls zu 10tel Ztr. auflösen und zu $^3/_{10}$ Ztr. addiren. $11 - 1 = 10$; $1 = ^{10}/_{10}$; $^3/_{10} + ^{10}/_{10} = ^{13}/_{10}$; $^{13}/_{10} - ^9/_{10} = ^4/_{10} = ^2/_5$; $10 - 7 = 3$; $^2/_5 + 3 = 3^2/_5$. Also ist $11^3/_{10} - 7^9/_{10} = 3^2/_5$. Oder: $11^3/_{10} = ^{113}/_{10}$; $7^9/_{10} = ^{79}/_{10}$; $^{113}/_{10} - ^{79}/_{10} = ^{34}/_{10} = ^{17}/_5 = 3^2/_5$ Ztr. — Antwort: Ad a. Der Kaufmann erhielt im Ganzen $19^1/_5$ Ztr. Ad b. Es war $3^2/_5$ Ztr. mehr Zucker, als Kaffee.

5) Emma erhielt von ihrer Mutter $^4/_5$ fl. Marktgeld. Davon kaufte sie für $^2/_3$ fl. Strickgarn; wie viel Geld behielt sie noch?
Berechnung: Die Brüche müssen gleichnamig gemacht werden; 15tel ist der gemeinschaftliche Nenner. $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15}$; $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$; $^{12}/_{15} - ^{10}/_{15} = ^2/_{15}$. Antwort: Emma hat noch $^2/_{15}$ fl. übrig.

6) Jemand kaufte eine $3^1/_4$ bayer. Tagwerke haltende Wiese, die er zu einem Obst- und Gemüse-Garten umwandeln will. $^5/_6$ Tagw. bestimmte er für den Gemüsebau; wie groß wird noch der Obstgarten werden?
Berechnung: Die Brüche sind unter gleiche Namen zu bringen; man kann sie zu 12tel machen. $^1/_4 = ^3/_{12}$; $^5/_6 = ^{10}/_{12}$. Da $^{10}/_{12}$ von $^3/_{12}$ nicht abgezogen werden kann, so muß man von den 3 Tgw. 1 Tgw. hinwegnehmen, in 12tel auflösen und zu $^3/_{12}$ addiren. $3 - 1 = 2$; $1 = ^{12}/_{12}$; $^3/_{12} + ^{12}/_{12} = ^{15}/_{12}$; $^{15}/_{12} - ^{10}/_{12} = ^5/_{12}$; $^5/_{12} + 2 = 2^5/_{12}$. Oder: $3\frac{1}{4} = \frac{13}{4} = \frac{39}{12}$; $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$; $^{39}/_{12} - ^{10}/_{12} = ^{29}/_{12} = 2^5/_{12}$. Es ist also $3^1/_4 - ^5/_6 = 2^5/_{12}$. Antwort: Für den Obstgarten bleiben $2^5/_{12}$ Tagwerke.

7) Ein Stück Tuch mißt $23^7/_8$ Ellen; davon werden $9^2/_3$ Ellen abgeschnitten; wie viele Ellen sind noch übrig?
Berechnung: $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$; $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$; $^{21}/_{24} - ^{16}/_{24} = ^5/_{24}$; $23 - 9 = 14$; $^5/_{24} + 14 = 14^5/_{24}$. Oder: $23\frac{7}{8} = \frac{191}{8} = \frac{573}{24}$; $9\frac{2}{3} = \frac{29}{3} = \frac{232}{24}$; $^{573}/_{24} - ^{232}/_{24} = ^{341}/_{24} = 14^5/_{24}$. Es ist sonach $23^7/_8 - 9^2/_3 = 14^5/_{24}$. — Antwort: Es sind noch $14^5/_{24}$ Ellen übrig.

8) Jemand hat eingenommen $9^1/_2$ fl. und $10^5/_6$ fl., und von der Einnahme wieder $17^4/_5$ fl. ausgegeben; wie viel Geld blieb ihm noch?
Berechnung: $^1/_2 = ^3/_6$; $^3/_6 + ^5/_6 = ^8/_6 = 1^2/_6 = 1^1/_3$; $9 + 10 = 19$; $19 + 1^1/_3 = 20^1/_3$. $20^1/_3$ ist die ganze Einnahme. — $^1/_3 = ^5/_{15}$; $^4/_5 = ^{12}/_{15}$; Da man von $^5/_{15}$ nicht $^{12}/_{15}$ abziehen kann, so muß man von 20 eine

Einheit (1) hinwegnehmen, diese in 15tel auflösen und zu ${}^{5}/_{15}$ addiren. $20-1=19$; $1={}^{15}/_{15}$; ${}^{5}/_{15}+{}^{15}/_{15}={}^{20}/_{15}$. ${}^{20}/_{15}-{}^{12}/_{15}={}^{8}/_{15}$; $19-17=2$; ${}^{8}/_{15}+2=2{}^{8}/_{15}$. Oder: $20\frac{1}{3}=\frac{61}{3}=\frac{305}{15}$; $17\frac{4}{5}=\frac{89}{5}=\frac{267}{15}$; ${}^{305}/_{15}-{}^{267}/_{15}={}^{38}/_{15}=2{}^{8}/_{15}$. Es ist somit $20{}^{1}/_{3}-17{}^{4}/_{5}=2{}^{8}/_{15}$. Antwort: Von der Gesammt-Einnahme bleiben noch $2{}^{8}/_{15}$ fl.

Viele Aufgaben mit unbenannten und benannten Bruchzahlen! Auch verbinde man das Addiren mit dieser Rechnungsart, wie schon durch ein paar Beispiele angedeutet werden ist, z. B. ${}^{3}/_{4}+2{}^{1}/_{2}-1{}^{1}/_{3}$ rc. rc. — In Reihen kann man das Abziehen mit Brüchen ebenfalls als stille Beschäftigung üben lassen, z. B.

${}^{1}/_{2}-{}^{1}/_{3}$	${}^{1}/_{3}-{}^{1}/_{4}$	${}^{2}/_{3}-{}^{1}/_{2}$	${}^{3}/_{4}-{}^{1}/_{2}$	u. s. w.	Oder:	${}^{9}/_{10}-{}^{8}/_{9}$	${}^{11}/_{12}-{}^{9}/_{10}$
${}^{1}/_{2}-{}^{1}/_{4}$	${}^{1}/_{3}-{}^{1}/_{5}$	${}^{2}/_{3}-{}^{1}/_{3}$	${}^{3}/_{4}-{}^{1}/_{3}$			${}^{8}/_{9}-{}^{7}/_{8}$	${}^{10}/_{11}-{}^{8}/_{9}$
${}^{1}/_{2}-{}^{1}/_{5}$	${}^{1}/_{3}-{}^{1}/_{6}$	${}^{2}/_{3}-{}^{1}/_{4}$	${}^{3}/_{4}-{}^{1}/_{4}$			${}^{7}/_{8}-{}^{6}/_{7}$	${}^{9}/_{10}-{}^{7}/_{8}$
${}^{1}/_{2}-{}^{1}/_{6}$	${}^{1}/_{3}-{}^{1}/_{7}$	${}^{2}/_{3}-{}^{1}/_{5}$	${}^{3}/_{4}-{}^{1}/_{5}$			${}^{6}/_{7}-{}^{5}/_{6}$	${}^{8}/_{9}-{}^{6}/_{7}$
u. s. w.	u. s. w.	u: s. w.	u. s. w.			u. s. w.	u. s. w.

Aufgaben.

1) Ziehe ab: a) ${}^{1}/_{5}$ von ${}^{4}/_{5}$; b) ${}^{3}/_{8}$ von ${}^{7}/_{8}$; c) ${}^{4}/_{15}$ von ${}^{13}/_{15}$; d) ${}^{2}/_{7}$ von ${}^{5}/_{7}$; e) ${}^{9}/_{19}$ von ${}^{17}/_{19}$; f) einzeln ${}^{1}/_{2}$, ${}^{1}/_{3}$, ${}^{1}/_{4}$ rc. bis ${}^{1}/_{12}$ von 1; g) ${}^{1}/_{6}$ von 3; h) ${}^{1}/_{9}$ von 7; i) ${}^{1}/_{13}$ von 3; k) ${}^{3}/_{5}$ von 1; l) ${}^{5}/_{6}$ von 1; m) ${}^{5}/_{11}$ von 1; n) ${}^{11}/_{15}$ von 1; o) ${}^{3}/_{4}$ von 2; p) ${}^{4}/_{9}$ von 3; q) ${}^{7}/_{10}$ von 4; r) ${}^{13}/_{16}$ von 5; s) ${}^{11}/_{17}$ von 6; t) ${}^{9}/_{20}$ von 7!

2) Ziehe ab: a) ${}^{3}/_{4}$ von $2{}^{3}/_{4}$; b) ${}^{5}/_{8}$ von $1{}^{5}/_{8}$; c) ${}^{4}/_{7}$ von $3{}^{4}/_{7}$; d) ${}^{2}/_{5}$ von $1{}^{3}/_{5}$; e) ${}^{1}/_{6}$ von $2{}^{5}/_{6}$; f) ${}^{4}/_{9}$ von $2{}^{7}/_{9}$; g) ${}^{7}/_{12}$ von $5{}^{11}/_{12}$; h) ${}^{6}/_{17}$ von $4{}^{15}/_{17}$; i) ${}^{2}/_{3}$ von $1{}^{1}/_{3}$; k) ${}^{4}/_{5}$ von $2{}^{3}/_{5}$; l) ${}^{5}/_{8}$ von $3{}^{1}/_{8}$; m) ${}^{9}/_{10}$ von $4{}^{3}/_{10}$; n) ${}^{7}/_{12}$ von $3{}^{11}/_{12}$; o) ${}^{13}/_{14}$ von $5{}^{5}/_{14}$; p) ${}^{19}/_{24}$ von $1{}^{7}/_{24}$; q) ${}^{29}/_{32}$ von $7{}^{5}/_{32}$!

3) Ziehe ab: a) $1{}^{1}/_{2}$ von $3{}^{1}/_{2}$; b) $2{}^{2}/_{3}$ von $3{}^{2}/_{3}$; c) $1{}^{1}/_{4}$ von $2{}^{3}/_{4}$; d) $4{}^{3}/_{5}$ von $7{}^{4}/_{5}$; e) $3{}^{5}/_{9}$ von $4{}^{8}/_{9}$; f) $2{}^{3}/_{4}$ von $5{}^{1}/_{4}$; g) $1{}^{5}/_{6}$ von $2{}^{1}/_{6}$; h) $3{}^{5}/_{7}$ von $6{}^{4}/_{7}$; i) $4{}^{9}/_{10}$ von $7{}^{3}/_{10}$; k) $5{}^{11}/_{15}$ von $11{}^{7}/_{15}$; l) $9{}^{17}/_{21}$ von $16{}^{11}/_{21}$!

4) Wie viel ist: a) ${}^{1}/_{2}$ weniger ${}^{1}/_{3}$; b) ${}^{1}/_{3}-{}^{1}/_{4}$; c) ${}^{1}/_{5}-{}^{1}/_{6}$ rc.; d) ${}^{2}/_{3}-{}^{1}/_{4}$; e) ${}^{3}/_{4}-{}^{1}/_{3}$; f) ${}^{3}/_{5}-{}^{1}/_{4}$; g) ${}^{5}/_{6}-{}^{1}/_{5}$; h) ${}^{3}/_{4}-{}^{2}/_{3}$; i) ${}^{5}/_{6}-{}^{4}/_{5}$; k) ${}^{7}/_{8}-{}^{5}/_{6}$; l) ${}^{11}/_{12}-{}^{3}/_{8}$; m) ${}^{7}/_{8}-{}^{7}/_{12}$; n) ${}^{2}/_{3}-{}^{4}/_{15}$; o) ${}^{4}/_{5}-{}^{7}/_{20}$!

5) Wie viel ist: a) $1{}^{1}/_{2}$ weniger ${}^{1}/_{3}$; b) $1{}^{1}/_{4}-{}^{1}/_{5}$; c) $2{}^{5}/_{6}-{}^{1}/_{8}$; d) $1{}^{1}/_{3}-{}^{1}/_{2}$; e) $1{}^{1}/_{6}-{}^{1}/_{5}$; f) $4{}^{7}/_{9}-{}^{2}/_{3}$; g) $1{}^{3}/_{8}-{}^{5}/_{6}$; h) $3{}^{2}/_{5}-{}^{7}/_{8}$; i) $5{}^{5}/_{10}-{}^{11}/_{15}$; k) $3{}^{4}/_{5}-2{}^{1}/_{2}$; l) $5{}^{5}/_{8}-2{}^{1}/_{6}$; m) $7{}^{5}/_{6}-3{}^{3}/_{5}$; n) $9{}^{3}/_{4}-2{}^{5}/_{7}$; o) $2{}^{1}/_{4}-1{}^{1}/_{2}$; p) $5{}^{1}/_{6}-4{}^{1}/_{3}$; q) $7{}^{1}/_{8}-2{}^{1}/_{5}$; r) $3{}^{1}/_{6}-1{}^{2}/_{3}$; s) $5{}^{1}/_{3}-2{}^{5}/_{6}$; t) $11{}^{3}/_{5}-6{}^{3}/_{4}$; u) $13{}^{3}/_{8}-5{}^{7}/_{12}$; v) $19{}^{4}/_{5}-11{}^{7}/_{8}$; w) $23{}^{13}/_{16}-14{}^{11}/_{12}$!

6) Karl hatte in seiner Sparbüchse einen Gulden; davon gibt er ${}^{1}/_{5}$ fl. aus; wie viel bleibt ihm noch?

7) Wenn Karl von diesem Gulden ausgegeben hätte ${}^{1}/_{8}$ fl., oder ${}^{1}/_{9}$ fl., oder ${}^{1}/_{15}$ fl., oder ${}^{3}/_{8}$ fl., oder ${}^{7}/_{12}$ fl., oder ${}^{5}/_{7}$ fl., oder ${}^{9}/_{16}$ fl.; wie viel wäre ihm dann je übrig geblieben?

8) Ein Kaufmann verkauft von 1 Ztr. Gewürz ${}^{9}/_{20}$ Ztr.; von 3 Ztr. Kaffee ${}^{7}/_{8}$ Ztr; von 5 Zentner Zucker ${}^{7}/_{12}$ Ztr.; von 4 Ztr. Reiß ${}^{5}/_{7}$ Ztr. und von 6 Ztr. Sago ${}^{11}/_{16}$ Ztr.; wie viel an Gewicht von jeder Sorte blieb ihm noch unverkauft?

9) Ein Schneidermeister ließ ${}^{1}/_{3}$ ℔ rothe Seide, ${}^{5}/_{8}$ ℔ blaue, ${}^{5}/_{6}$ ℔ grüne, ${}^{11}/_{12}$ ℔ schwarze, ${}^{3}/_{5}$ ℔ braune und ${}^{13}/_{16}$ ℔ graue Seide kommen. Nach einiger Zeit hatte er verbraucht ${}^{1}/_{4}$ ℔ rothe Seide, ${}^{1}/_{3}$ ℔ blaue, ${}^{2}/_{5}$ ℔ grüne, ${}^{5}/_{9}$ ℔ schwarze, ${}^{1}/_{8}$ ℔ braune und ${}^{7}/_{12}$ ℔ graue Seide; wie viele ℔ Vorrath von jeder Sorte hatte er noch?

10) Ein Bäcker kaufte: a) $1{}^{3}/_{4}$ Schfl. Weizen, b) $3{}^{1}/_{2}$ Schfl. Kern, c) $4{}^{5}/_{6}$ Schfl. Roggen und d) $2{}^{2}/_{3}$ Schfl. Gerste. Davon hatte er bereits verbacken: a) ${}^{1}/_{2}$ Schfl. Weizen, b) ${}^{5}/_{6}$ Schfl. Kern, c) $1{}^{3}/_{8}$ Schfl. Roggen und d) $1{}^{4}/_{5}$ Schfl. Gerste; wie viele Schfl. blieben ihm noch von jeder Sorte?

11) Ein Krämer hat 6 Stück Tuch zu Markt gebracht: a) mißt $33{}^{1}/_{4}$ Ellen, b) $25{}^{2}/_{3}$ Ellen, c) $19{}^{4}/_{5}$ Ell., d) $28{}^{5}/_{6}$ Ell., e) $22{}^{3}/_{8}$ Ell. und f) $35{}^{7}/_{12}$ Ell. Er verkaufte von a) $9{}^{1}/_{16}$ Ell., von b) $12{}^{1}/_{4}$ Ell., von c) $6{}^{3}/_{4}$ Ell, von d) $15{}^{7}/_{8}$ Ell., von e) $10{}^{2}/_{3}$ Ell. und von f) $17{}^{5}/_{6}$ Ell.; wie viele Ellen sind von jedem Stücke noch übrig?

12) Ernst ist $3{}^{5}/_{6}$ Jahre alt und seine Schwester Ida $9{}^{5}/_{8}$ Jahre; um wie viele Jahre ist Ernst jünger als Ida?

13) Ein Bote soll $27\frac{5}{8}$ Meilen gehen; er hat aber erst $9\frac{4}{5}$ Meilen zurückgelegt; wie viele Meilen hat er noch zu gehen?

14) Von $42\frac{7}{16}$ Ellen Leinwand will eine Hausfrau so viel abschneiden, daß ihr noch $15\frac{5}{6}$ Ellen übrig bleiben; wie viele Ellen darf sie abschneiden?

15) Nimm den 6ten Theil von 29 fl. hinweg vom 8ten Theile von 53 fl.; was bleibt noch übrig?

16) Von $14\frac{3}{5}$ ℔ Zucker wurden verbraucht $2\frac{2}{3}$ ℔ und $4\frac{14}{15}$ ℔; wie viel Pfund Zucker ist noch übrig?

17) Anna kaufte von einer Leinwandhändlerin $7\frac{1}{2}$ Ellen, $9\frac{3}{4}$ Ellen und $15\frac{5}{8}$ Ellen Leinwand. a) Wie viele Ellen Leinwand hat sie im Ganzen gekauft? b) Wenn sie das ganze Stück, das $56\frac{2}{3}$ Ellen hielt, genommen hätte, wie viele Ellen hätte sie dann noch kaufen müssen?

18) Ziehe von 48 fl. ab: $\frac{7}{8}$ fl., vom Reste $\frac{1}{2}$ fl., von diesem Reste $\frac{3}{4}$ fl., von diesem Reste $\frac{5}{6}$ fl., von diesem Reste $7\frac{2}{3}$ fl., und von diesem Reste $18\frac{4}{5}$ fl.; wie viel beträgt der jedesmalige Rest?

19) Vermindere 9 fl. nach und nach um $\frac{5}{6}$ fl., und zähle zu jedem Reste immer $\frac{3}{8}$ fl., bis nichts mehr abgezogen werden kann; was kommt jedes Mal heraus?

20) Traugott fragte seinen Vater nach dessen Alter. „Die Mutter," sagte dieser, „ist $4\frac{5}{6}$ Jahre jünger als ich, du bist $20\frac{4}{5}$ Jahre jünger als deine Mutter, und wäre ich $5\frac{13}{15}$ Jahre älter, als euer beiderseitiges Alter zusammengenommen beträgt, so wäre ich gerade 44 Jahre alt." — Wie alt war also der Vater, wie alt die Mutter, wie alt der Sohn? Um wie viele Jahre war der Vater älter, als die Mutter? um wie viele Jahre älter als der Sohn?

b) Schriftliche Darstellung.

Die nachfolgenden, vollständig berechneten und erklärten Beispiele lehren die Darstellung und das schriftliche Verfahren für das Abziehen der Brüche. Für die Subtraktion werden ebenfalls die beiden Bruchzahlen unter einander geschrieben, nämlich der Subtrahend unter den Minuenden, wie bei ganzen Zahlen.

1. Abziehen gleichnamiger Brüche.

Beispiele.

1) Ziehe ab $\frac{4}{15}$ von $\frac{13}{15}$!

Darstellung u. Berechnung: Erklärung.

(Minuend) $\frac{13}{15}$	13	
(Subtrahend) $\frac{4}{15}$	4	
	—3)	
$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$	

Man schreibt zuerst den Minuenden (die Vollzahl) an, darunter den Subtrahenden (die Abzugszahl), zieht rechts einen senkrechten, unten einen wagrechten Strich, setzt die Zähler aus, und behandelt diese, als wären es ganze Zahlen, d. h. man zieht den Subtrahenden (4) von dem Minuenden (13) ab, schreibt den Rest (9) unter den Querstrich und gibt demselben den gemeinschaftlichen Nenner zum Nenner ($\frac{9}{15}$); läßt sich der Rest kürzen, so geschieht dieses ($\frac{9}{15}\,{}^{3} = \frac{3}{5}$) und setzt denselben dann unter die beiden Bruchzahlen.

Antwort: $\frac{4}{15}$ von $\frac{13}{15}$ abgezogen bleibt noch $\frac{3}{5}$.

2) Was bleibt, wenn man von $3\frac{11}{15}$ abzieht $\frac{5}{12}$?

Darstellung u. Berechnung: Erklärung:

$3\frac{11}{12}$	11
$\frac{5}{12}$	5
	—2)
$3\frac{1}{2}$	$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Es gilt ganz das vorher Gesagte. Da hier aber die Vollzahl noch Ganze bei sich hat, so werden diese zu dem Reste unter die Abzugszahlen gesetzt.

Antwort: Es bleibt noch $3\frac{1}{2}$.

3) Wie viel bleibt, wenn man $4^{19}/_{32}$ von 17 hinwegnimmt?

Darstellung u. Berechnung: Erklärung.

	32
17′	32
$4^{19}/_{32}$	19
$12^{13}/_{32}$	$^{13}/_{32}$

Der Ansatz wie vorher. Hier muß man, um den Bruch abziehen zu können, von dem Minuenden (17) eine Einheit (1) entlehnen, was durch ein Strichchen oben rechts an der Zifferstelle, bei der man entlehnt, angezeigt wird; verwandelt die entlehnte 1 in solche Theile, in welchen der abzuziehende Bruch gegeben ist ($1 = ^{32}/_{32}$), und verfährt dann, wie zuerst gesagt. Hat der Subtrahend Ganze bei sich, so zieht man diese von den noch übrigen Ganzen des Minuenden ab. Antw.: Es bleibt noch $12^{13}/_{32}$.

4) Vermindere $9^4/_{15}$ um $^{13}/_{15}$!

Darstellung u. Berechnung: Erklärung.

	15
$9'^4/_{15}$	$4 + 15 = 19$
$^{13}/_{15}$	 13
$8^2/_5$	3) $^6/_{15} = ^2/_5$

Da man $^{13}/_{15}$ von $^4/_{15}$ nicht abziehen kann, so borgt man von 9 eine Einheit (1), verwandelt diese in 15tel ($1 = ^{15}/_{15}$) und zählt sie zu den $^4/_{15}$ ($^4/_{15} + ^{15}/_{15} = ^{19}/_{15}$). Das weitere Verfahren wie vorher.

Oder: $^{13}/_{15}$ von $1 = ^{13}/_{15}$ von $^{15}/_{15}$ bleibt $^2/_{15}$; $^2/_{15} + ^4/_{15} = ^6/_{15} = ^2/_5$; dazu 8, gibt $8^2/_5$. — Antwort: $9^4/_{15}$ vermindert um $^{13}/_{15}$ gibt $8^2/_5$.

5) Um wie viel ist $34^{19}/_{36}$ mehr, als $16^{25}/_{36}$?

Darstellung u. Berechnung: Erklärung.

	36
$34'^{19}/_{36}$	$19 + 36 = 55$
$16\ ^{25}/_{36}$	 25
$17\ ^5/_6$	6) $^{30}/_{36} = ^5/_6$

Ansatz und Verfahren wie vor; sodann zieht man noch die Ganzen des Subtrahenden von den übrig gebliebenen Ganzen des Minuenden (16 von 33) ab und schreibt diese nebst dem mit der Zahl 6 gekürzten Bruchrest unter die Abzugszahlen. — Oder: Man zieht zuerst 25 von 36, d. i. $^{25}/_{36}$ von $^{36}/_{36}$ ab, bleibt 11; diese zu 19 gezählt (11 + 19) gibt 30, d. i. $^{30}/_{36} = ^5/_6$ u. s. w. Antwort: $34^{19}/_{36}$ ist um $17^5/_6$ mehr als $16^{25}/_{36}$.

2. Abziehen ungleichnamiger Brüche.

Beispiele.

1) Was bleibt, wenn man $^7/_{12}$ von $^{13}/_{16}$ abzieht?

Darstellung u. Berechnung: Erklärung.

	48
$^{13}/_{16}$	$3 \times 13 = 39$
$^7/_{12}$	$4 \times 7 = 28$
$^{11}/_{48}$	$^{11}/_{48}$

Der Ansatz wie vorhin. Die ungleichnamigen Brüche müssen vorerst gleichnamig gemacht werden. Der gemeinschaftliche Nenner ist 48, also lassen sich beide Brüche in 48stel verwandeln. $^1/_{16} = ^3/_{48}$; $^{13}/_{16} = \frac{3 \times 13}{48} = ^{39}/_{48}$; $^1/_{12} = ^4/_{48}$; $\frac{4 \times 7}{48} = ^{28}/_{48}$. Man zieht nun, wie bei gleichnamig gegebenen Brüchen, den Zähler des Subtrahenden von dem Zähler des Minuenden

(39 — 29 = 11) ab, gibt dem Reste den gemeinschaftlichen Nenner zum Nenner, hier nämlich $^{11}/_{48}$, und setzt diesen Rest unter die Abzugszahlen.
Antwort: Es bleibt noch $^{11}/_{48}$.

2) Wie viel beträgt der Unterschied zwischen $79^{13}/_{15}$ und $51^{17}/_{24}$?

Darstellung u. Berechnung:

	120
$79^{13}/_{15}$	$8 \times 13 = 104$
$51^{17}/_{24}$	$5 \times 17 = 85$
$28^{19}/_{120}$	$^{19}/_{120}$

Erklärung.
Beide Brüche lassen sich in 120stel auflösen. Man thut dieses, verfährt dann, wie vorher und zieht hierauf noch die Ganzen der Abzugszahl von den Ganzen der Vollzahl ab. Antwort: Der Unterschied beträgt $28^{19}/_{120}$.

3) Vermindere $766^{3}/_{8}$ um $347^{9}/_{11}$!

Darstellung u. Berechnung:

	88
$766^{3}/_{8}$	$11 \times 3 = 33 + 88 = 121$
$347^{9}/_{11}$	$8 \times 9 = 72 + - = 72$
$418^{49}/_{88}$	$^{49}/_{88}$

Erklärung.
88 ist der gemeinschaftliche Nenner.
$^{1}/_{8} = ^{11}/_{88}$; $\frac{11 \times 3}{88} = ^{33}/_{88}$;
$^{1}/_{11} = ^{8}/_{88}$; $\frac{8 \times 9}{88} = ^{72}/_{88}$.

$^{72}/_{88}$ kann man von $^{33}/_{88}$ nicht abziehen, daher borgt man von der Vollzahl 766 eine Einheit (1), löſ't diese ebenfalls in 88stel auf ($1 = ^{88}/_{88}$) und addirt sie zu $^{33}/_{88}$ ($^{33}/_{88} + ^{88}/_{88} = ^{121}/_{88}$), wovon dann $^{72}/_{88}$ abgezogen werden können (121 — 72 = 49, d. i. $^{49}/_{88}$ Rest). Nun zieht man noch die Ganzen (347) von den übrigen Ganzen der Vollzahl (766 — 1 = 765) ab (765 — 347 = 418) und setzt zu diesem Reste den Bruchrest. Antwort: $766^{3}/_{8}$ um $347^{9}/_{11}$ vermindert, gibt $418^{49}/_{88}$.

4) Zähle zusammen $35^{3}/_{5}$, $59^{2}/_{3}$, $67^{5}/_{6}$ und $92^{7}/_{10}$, und ziehe von der Summe $187^{3}/_{16}$ ab; wie viel bleibt übrig?

Darstellung und Berechnung:

	30
$35^{3}/_{5}$	18
$59^{2}/_{3}$	20
$67^{5}/_{6}$	25
$92^{7}/_{10}$	21
$255^{4}/_{5}$	$^{84}/_{30} = 2^{24}/_{30} = 2^{4}/_{5}$.

	80
$255^{4}/_{5}$	64
$187^{3}/_{16}$	15
$-68^{49}/_{80}$	$^{49}/_{80}$

Erklärung.
Hier müssen zuerst die gegebenen Summanden addirt werden. Die Summe derselben ($255^{4}/_{5}$) gibt den Minuenden, wovon sodann der gegebene Subtrahend ($187^{3}/_{16}$) abgezogen wird.

Das Verfahren ist bekannt. Antwort: Es bleibt noch $68^{49}/_{80}$ übrig.

5) Was beträgt der Rest, wenn man von $387^{2}/_{3} + 293^{4}/_{5} + 865^{8}/_{9} + 456^{3}/_{4}$ abzieht $523^{1}/_{2} + 199^{5}/_{8} + 367^{4}/_{7} + 94^{5}/_{6}$?

Darstellung und Berechnung.

	180
$387^{2}/_{3}$	$60 \times 2 = 120$
$293^{4}/_{5}$	$36 \times 4 = 144$
$865^{8}/_{9}$	$20 \times 8 = 160$
$456^{3}/_{4}$	$45 \times 3 = 135$
$2004^{19}/_{180}$	$^{559}/_{180} = 3^{19}/_{180}$

	168
$523^{1}/_{2}$	$84 \times 1 = 84$
$199^{5}/_{8}$	$21 \times 5 = 105$
$367^{4}/_{7}$	$24 \times 4 = 96$
$94^{5}/_{6}$	$28 \times 5 = 140$
$1185^{89}/_{168}$	$^{425}/_{168} = 2^{89}/_{168}$

	2520	
$2004'\frac{19}{180}$	$14 \times 19 = 266\ (+2520) =$	2786
$1185\frac{89}{168}$	$15 \times 89 = 1335$	1335
$-818\frac{1451}{2520}$		$\frac{1451}{2520}$

Erklärung. Zuerst mußten die Summanden für die Vollzahl und für die Abzugszahl addirt werden, dann konnte erst das Abziehen bewerkstelligt werden. Bei der letzten Operation mußte eine Einheit (1) von der Vollzahl geborgt, in 2520stel aufgelöſ't ($1 = \frac{2520}{2520}$) und zu dem Bruche der Vollzahl ($266 + 2520 = 2786$, d. i. $\frac{2786}{2520}$) gezählt werden, u. s. w.

Antwort: Der Rest beträgt $818\frac{1451}{2520}$.

3. Abziehen angewandter Bruchzahlen.

1) Ein Armenfreund vermachte 750 fl. einer Gemeinde unter der Bedingung, daß $366^5/_{12}$ fl. dem Armenfonde und der Rest dem Schulfonde überwiesen werden soll. a) Wie viel erhielt der Schulfond? b) Wenn hierab auf Preisebücher und Unterstützung dürftiger Schulkinder sogleich $87^{11}/_{12}$ fl. verausgabt wurden, was verblieb noch für den Schulfond?

Darstellung und Berechnung:

fl.	12	fl.	12	
750'	12	$383'^7/_{12}$	$7 + 12 = 19$	Die Ausführung ist bekannt.
$366^5/_{12}$	5	$87^{11}/_{12}$	 11	
$383^7/_{12}$	$^7/_{12}$	$295^2/_3$	$^8/_{12} = {}^2/_3$	

Antwort: Der Schulfond erhielt $383^7/_{12}$ fl. b) Dem Schulfonde blieben noch $295^2/_3$ fl. übrig.

2) Ein Kaufmann erhält zwei Ballen Tuch, welche zusammen $157^5/_8$ Ellen messen. Die eine Balle hält $71^1/_3$ Ellen und wird sogleich ganz verkauft. Von der andern schneidet er $29^4/_5$ Ellen ab; wie viele Ellen Tuch behält er noch übrig?

Darstellung und Berechnung:

Ell.	24	Ell.	120
$157^5/_8$	15	$86'^7/_{24}$	$5 \times 7 = 35\ (+120) = 155$
$71^1/_3$	8	$29^4/_5$	$24 \times 4 =$ 96
$86^7/_{24}$	$^7/_{24}$	$55^{59}/_{120}$	$^{59}/_{120}$

Erklärung. Hier muß vorerst gesucht werden, wie viele Ellen die andere Balle hält, was durch die Subtraktion gefunden wird. Das Verfahren ist aus vorigen Beispielen bekannt.

Antwort: Der Kaufmann behält noch $56^{59}/_{120}$ Ellen.

3) Jemand kauft ein Gut, das ihm mit sämmtlichen Auslagen auf $12785^7/_8$ fl. zu stehen kommt. Man zahlt daran sogleich $9087^1/_2$ fl., und später noch $843^7/_{10}$ fl.; wie hoch steht jetzt noch die Schuld?

Darstellung und Berechnung: Erklärung.

fl.	10	fl.	40
$9087\frac{1}{2}$	5	$12784\frac{7}{8}$	35
$843\frac{7}{10}$	7	$9931\frac{1}{5}$	8
$9931\frac{1}{5}$	$\frac{12}{10} = 1\frac{2}{10} = 1\frac{1}{5}$	$2854\frac{27}{40}$	$\frac{27}{40}$

Hier muß zuerst berechnet werden, was im Ganzen bezahlt wurde (was man durch Addition findet,) und zieht sodann diese Summe von den Gesammtauslagen ab. — Das Verfahren ist bekannt. Antwort: Die Schuld beträgt noch $2854\frac{27}{40}$ fl.

4) In einem Hause sind 4 Familien im Miethzins. A zahlt $120\frac{4}{5}$ fl., B $135\frac{7}{8}$ fl., C $97\frac{2}{3}$ fl. und D $89\frac{5}{7}$ fl. jährl. Miethe. Wenn nun der Hauseigenthümer jährlich an Abgaben $23\frac{7}{9}$ fl., an Zinsen $72\frac{5}{6}$ fl. und auf Ausbesserungskosten $67\frac{3}{8}$ fl. entrichtet; wie groß ist der Ueberschuß der Einnahme über die Ausgabe?

Darstellung und Berechnung:

Einnahmen: fl.		840	Ausgaben: fl.	72
A.	$120\frac{4}{5}$	$168 \times 4 = 672$	$23\frac{7}{9}$	56
B.	$135\frac{7}{8}$	$105 \times 7 = 735$	$72\frac{5}{6}$	60
C.	$97\frac{2}{3}$	$280 \times 2 = 560$	$67\frac{3}{8}$	27
D.	$89\frac{5}{7}$	$120 \times 5 = 600$	$163\frac{71}{72}$	$\frac{143}{72} = 1\frac{71}{72}$
Summa:	$444\frac{47}{840}$	$840 : 2567 = 3\frac{47}{840}$		

	fl.	2520
Einnahme:	$444\frac{47}{840}$	$3 \times 47 = 141\ (+2520) = 2661$
Ausgabe:	$136\frac{71}{72}$	$35 \times 71 = 2485 \ldots\ldots\ 2485$
Ueberschuß:	$280\frac{22}{315}$	8) $\frac{176}{2520} = \frac{22}{315}$

Antwort: Der Ueberschuß der Einnahmen über die Ausgaben beträgt $280\frac{22}{315}$ fl.

5) Drei Freunde, A, B und C machen zu gleicher Zeit Gewinnste in der Lotterie. A gewinnt $60\frac{1}{3}$ fl. mehr als B, und B $96\frac{4}{5}$ fl. mehr als C. — Hätte A so viel als B und C zusammengenommen gewonnen, und fehleten nicht noch $17\frac{13}{15}$ fl., so wäre der Gewinn des A gerade 200 fl. gewesen. — Wie viel hat demnach Jeder gewonnen? — (Wie viel hat Jeder mehr als der Andere?)

Beurtheilung der Aufgabe. In der Aufgabe heißt es: „Hätte A so viel als B und C zusammengenommen gewonnen, und fehleten nicht noch $17\frac{13}{15}$ fl., so wäre der Gewinn des A gerade 200 fl. gewesen." — Die Gewinnste des B und C müssen also 200 fl., weniger $17\frac{13}{15}$ fl. betragen. (Siehe folgende Berechnung a) Ferner: „B gewinnt $96\frac{4}{5}$ fl. mehr als C;" folglich müssen diese $96\frac{4}{5}$ fl. von dem Gesammtgewinne des B und C für B zum Voraus abgezogen werden (s. folgende Berechnung b), und den Rest (s. b) haben B und C gleichheitlich zu theilen. Ein solcher Theil ist der Gewinn des C (s. c.). B gewinnt $96\frac{4}{5}$ fl. mehr als C; diese $96\frac{4}{5}$ fl. müssen also zu dem Gewinne des C gezählt werden (s. d), und A gewinnt $60\frac{1}{3}$ fl. mehr als B, daher ist der Gewinn des B und $60\frac{1}{3}$ fl. gleich dem Gewinne des A (s. e).

Darstellung und Berechnung:

fl.	15		fl.	15
200′	15		$182\frac{2}{15}$	$2 + 15 = 17$
$17\frac{13}{15}$	13	B voraus	$96\frac{4}{5}$	12 . . . 12
a) $182\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$		b) $85\frac{1}{3}$	$\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

c) $85\frac{1}{3}$ fl. $(= 84 + \frac{3}{3} + \frac{1}{3}) = 84\frac{4}{3}$; die Hälfte von 84 ist 42, und die Hälfte von $\frac{4}{3}$ ist $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} + 42 = 42\frac{2}{3}$ fl. als Gewinn des C.

	fl.	15		fl.	15
B	$42\frac{2}{3}$	10	A	$139\frac{7}{15}$	7
+	$96\frac{4}{5}$	12	+	$60\frac{1}{3}$	5
d)	$139\frac{7}{15}$	$\frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$	e)	$199\frac{4}{5}$	$\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

Erklärung. Aus der vorangegangenen Beurtheilung ergeben sich von selbst die erforderlichen Rechnungsarten, und die Ausführung dieser ist aus Obigem bekannt.

Antwort: A gewinnt $199\frac{4}{5}$ fl., B $139\frac{7}{15}$ fl. und C $42\frac{2}{3}$ fl. —

Aufgaben.

1) Vermindere: a) 17 um $\frac{7}{8}$, um $\frac{11}{15}$, um $\frac{19}{24}$, um $\frac{27}{32}$, um $\frac{23}{45}$, um $\frac{31}{67}$, um $\frac{37}{114}$; b) 40 um $\frac{7}{9}$, um $\frac{17}{20}$, um $\frac{23}{36}$, um $\frac{41}{58}$, um $\frac{63}{100}$, um $\frac{77}{127}$; c) 131 um $\frac{87}{124}$, um $\frac{95}{167}$, um $\frac{111}{197}$, um $\frac{317}{493}$, um $\frac{487}{786}$; und gib an, wie viel Rest jedes Mal bleibt?

2) Vermindere: a) 53 um $7\frac{4}{5}$, um $11\frac{11}{12}$, um $19\frac{7}{18}$, um $36\frac{17}{24}$, um $43\frac{39}{50}$; b) 180 um $60\frac{9}{10}$, um $73\frac{19}{30}$, um $99\frac{37}{40}$, um $109\frac{47}{60}$, um $138\frac{71}{100}$; c) 765 um $95\frac{9}{14}$, um $127\frac{14}{25}$, um $181\frac{31}{48}$, um $276\frac{59}{96}$, um $342\frac{79}{124}$, um $598\frac{274}{689}$!

3) Suche den Unterschied zwischen: a) $47\frac{19}{24}$ und $\frac{7}{24}$; b) $93\frac{61}{84}$ und $\frac{51}{84}$, c) $75\frac{43}{72}$ und $\frac{69}{72}$, d) $88\frac{123}{452}$ und $\frac{209}{452}$, e) $85\frac{73}{96}$ und $35\frac{81}{96}$, f) $98\frac{75}{88}$ und $46\frac{35}{88}$, g) $80\frac{47}{70}$ und $60\frac{29}{70}$, h) $167\frac{33}{76}$ und $87\frac{65}{76}$; i) $207\frac{93}{115}$ und $96\frac{102}{115}$, k) $274\frac{25}{148}$ und $132\frac{43}{148}$, l) $435\frac{103}{169}$ und $277\frac{140}{169}$, m) $571\frac{247}{448}$ und $379\frac{361}{448}$!

4) Ziehe einzeln ab: a) $\frac{5}{8}$, b) $\frac{5}{6}$, c) $\frac{7}{12}$, d) $\frac{13}{16}$, e) $\frac{19}{30}$, f) $\frac{21}{32}$, g) $\frac{35}{48}$, h) $\frac{49}{72}$, i) $\frac{61}{84}$ von $\frac{23}{24}$! — ebenso von $\frac{37}{40}$ und $\frac{52}{57}$, und gib den jedesmaligen Unterschied an!

5) Ziehe einzeln ab: a) $7\frac{2}{3}$, b) $13\frac{3}{4}$, c) $26\frac{4}{5}$, d) $37\frac{13}{16}$, e) $40\frac{21}{25}$, f) $53\frac{17}{18}$ g) $69\frac{29}{30}$, h) $74\frac{41}{45}$ von $105\frac{5}{6}$! — und ebenso von $93\frac{5}{8}$ und $270\frac{13}{20}$!

6) Was ist der Unterschied zwischen; a) $\frac{11}{15}$ und $\frac{9}{14}$, b) $1\frac{5}{7}$ und $\frac{3}{8}$, c) $13\frac{7}{16}$ und $9\frac{8}{9}$, d) $87\frac{31}{40}$ und $63\frac{55}{56}$, e) $17\frac{15}{72}$ und $9\frac{40}{81}$, f) $357\frac{75}{124}$ und $69\frac{203}{296}$, g) $978\frac{8}{33}$ und $795\frac{27}{46}$, h) $455\frac{13}{29}$ und $689\frac{15}{32}$?

7) Was ist jedes Mal der Rest von a) $15\frac{5}{6} + 23\frac{7}{15}$ weniger $19\frac{7}{8}$; b) $59\frac{13}{24}$, weniger $9\frac{13}{16}$ und $27\frac{4}{5}$; c) $23\frac{4}{5} + 37\frac{2}{3} + 45\frac{3}{8}$, weniger $13\frac{5}{6} + 31\frac{3}{4}$; d) $97\frac{1}{2} + 258\frac{2}{3} + 953\frac{17}{18}$, weniger $192\frac{11}{12} + 307\frac{4}{5} + 87\frac{21}{25}$? — (Um wie viel ist jeder Rest kleiner oder größer als der andere?)

8) Wie viel beträgt der Unterschied des Unterschiedes zwischen $167\frac{7}{8}$ und $398\frac{5}{12}$, und des Unterschiedes zwischen $987\frac{2}{3}$ und $291\frac{11}{16}$?

9) Ein Kaufmann erhält $\frac{47}{52}$ Ztr. Gewürz, $7\frac{19}{52}$ Ztr. Kaffee und $13\frac{1}{8}$ Ztr. Zucker. Um wie viel Zentner erhielt er mehr Kaffee als Gewürz? und wie viel mehr Zucker, als Kaffee und als Gewürz.

10) Ein Güterwagen hatte $69\frac{83}{105}$ Ztr. verladen, und ein anderer $103\frac{16}{35}$ Ztr.; wie viel der eine mehr als der andere?

11) In einer Tuchfabrik wurden in einem Monat $9783\frac{7}{33}$ Ellen Tuch gefertigt; im darauffolgenden Monat aber nur $5796\frac{27}{40}$ Ellen; wie viel also weniger?

12) Ein Flügel-Fortepiano, das $785\frac{35}{48}$ fl. kostete, und wofür man $13\frac{11}{15}$ fl. für Transport bezahlte, wird um $437\frac{5}{9}$ fl. verkauft; wie groß ist der Verlust?

13) Die geographische oder deutsche Meile hat $25380\frac{3}{40}$ bayerische Fuß oder $22803\frac{71}{243}$ Pariser Fuß, und die bayer. Meile hat 25406 bayer. Fuß oder $22826\frac{13}{111}$ Pariser Fuß; um wie viele bayer. und um wie viele Pariser Fuß ist die bayer. Meile größer, als die geographische?

14) Ein Kaufmann erhielt 6 Ballen Tuch, jede zu $73\frac{4}{15}$ Ellen. Er verkaufte von der ersten Balle $27\frac{3}{4}$ Ell., von der zweiten $23\frac{5}{6}$ Ell., von der dritten $39\frac{8}{9}$ Ell., von der vierten $41\frac{3}{7}$ Ell., von der fünften $57\frac{8}{15}$ Ell. und von der sechsten $35\frac{23}{32}$ Ell.; wie viel Ellen sind von jeder Balle noch vorräthig?

15) Wird die Oberfläche der Erde als 1 angenommen, so ist die des Mondes $\frac{3}{40}$, die des Merkurs $\frac{5}{31}$, die des Mars $\frac{11}{41}$, die der Venus $\frac{23}{26}$, die des Uranus $18\frac{23}{30}$, die des Saturns $99\frac{2}{3}$, die des Jupiters $118\frac{1}{296}$ und die der Sonne $12421\frac{2}{11}$ der der Erde. Um wie viel ist die Oberfläche jedes vorangehenden dieser Himmelskörper kleiner, als die des nächstfolgenden?

16) Ein Hausbesitzer vermiethet 6 Wohnungen. A zahlt $195\frac{4}{5}$ fl., B $167\frac{5}{8}$ fl., C $156\frac{8}{9}$ fl., D. $243\frac{19}{20}$ fl., E $210\frac{4}{7}$ fl. und F $124\frac{29}{32}$ fl. Wenn der Hauseigenthümer jährlich von dieser Einnahme verausgabt: a) $47\frac{5}{6}$ fl. an Steuern, b) $157\frac{9}{16}$ fl. an Passiv-Kapitalzinsen, c) $63\frac{4}{5}$ fl. an Dienstbotenlöhne und d) $127\frac{2}{3}$ fl. an Ausbesserungskosten; wie groß wird der Ueberschuß der Einnahme über die Ausgabe sein?

17) A, B, C und D gewannen in der Lotterie $1729\frac{11}{32}$ fl. A $453\frac{1}{5}$ fl., B $297\frac{17}{20}$ fl., C $387\frac{8}{9}$ fl. und D den Rest; wie viel gewann D? Wer hat das Meiste gewonnen? und wie viel dieser mehr, als jeder der Uebrigen?

18) Ein Oekonom erntete $238\frac{4}{5}$ Schfl. Veesen, $93\frac{11}{12}$ Schfl. Roggen, $197\frac{13}{16}$ Schfl. Gerste, $167\frac{5}{7}$ Schfl. Haber und $42\frac{1}{6}$ Schfl. Erbsen. Er verkaufte $119\frac{8}{9}$ Schfl. Veesen, $46\frac{14}{15}$ Schfl. Roggen, $108\frac{19}{24}$ Schfl. Gerste, $98\frac{7}{8}$ Schfl. Haber und $23\frac{9}{10}$ Schfl. Erbsen. a) Wie viele Schfl. hat er im Ganzen geerntet? b) wie viele verkauft? c) Wie viele Schfl. von jeder Fruchtsorte blieben ihm noch übrig? d) Wie viele Schfl. erntete er von jeder Fruchtsorte mehr oder weniger, als von den andern?

19) Pestalozzi (geb. 1746 am 12. Januar) wurde $81\frac{46}{365}$ Jahre alt; Salzmann (geb. 1. Juni 1744) wurde $67\frac{51}{120}$ Jahre; Franklin (geb. 17. Jan. 1706) wurde $92\frac{1}{4}$ Jahre; Newton (geb. 25. Dezbr. 1642) wurde $84\frac{21}{52}$ Jahre; Kant (geb. 22. April 1724) wurde $79\frac{147}{183}$ Jahre; Keppler (geb. 21. Dez. 1571) wurde $58\frac{54}{73}$ Jahre; Schiller (geb. 10. Nov. 1759) wurde $45\frac{182}{365}$ Jahre, und Mozart (geb. 27. Juni 1756) wurde $35\frac{53}{122}$ Jahre alt. Wie viele Jahre mehr oder weniger erreichte jeder dieser Männer, als jeder der andern?

20) Die Metalle werden durch das Schmieden dichter, also in gleichem Raume schwerer. Es wiegt:

1 bayer. Cubikfuß	Platin	gegossen	$925\frac{101}{160}$	bayer.	℔;
		geschmiedet	$981\frac{5}{40}$	„	℔;
1 „ „	Gold	gegossen	$850\frac{29}{48}$	„	℔,
		geschmiedet	$859\frac{309}{640}$	„	℔;
1 „ „	Silber	gegossen	$462\frac{305}{2048}$	„	℔,
		geschmiedet	$471\frac{121}{256}$	„	℔;
1 „ „	Kupfer	zu Draht gez.	$394\frac{289}{1250}$	„	℔,
		geschmiedet	$399\frac{11}{25}$	„	℔;
1 „ „	Eisen	gegossen	$321\frac{138}{160}$	„	℔,
		geschmiedet	$345\frac{451}{1152}$	„	℔;
1 „ „	Zinn	gegossen	$323\frac{310}{500}$	„	℔,
		geschmiedet	$366\frac{377}{478}$	„	℔.

Was beträgt die Gewichtszunahme bei jedem Metalle? Bei welchem Metalle ist die Gewichtszunahme am größten und um wie viel mehr, als bei jedem andern? bei welchem am geringsten, und um wie viel weniger, als bei jedem andern? (Um wie viel ist jedes Metall schwerer und leichter, als jedes andere?)

III. Multipliziren.

a) Mündliche Uebungen.

1. Multipliziren eines Bruches mit einer ganzen Zahl.

In den Vorübungen (siehe „Mögliche Veränderungen mit Brüchen" Seite 25 B. und Seite 29 E.) ist gezeigt und erklärt worden, daß die Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl auf zweifache Weise ausgeführt werden kann, und zwar 1tens indem man den Zähler des gegebenen Bruches mit einer ganzen Zahl multiplizirt und den Nenner unverändert läßt (eigentliche Multiplikation); oder 2tens daß man den Nenner des gegebenen Bruches mit der ganzen Zahl dividirt und den Zähler unverändert läßt (Multiplikation durch Division).

Beispiele.

1) Vervielfache $^1/_4$ mit 2!

1. Berechnung: $1 + 1$ ist gleich 2mal 1, und 2mal $1 = 2$; daher ist $^1/_4 + {}^1/_4$ auch 2mal $^1/_4$, und 2mal $^1/_4$ also $^2/_4 = {}^1/_2$.

2. Berechnung: Da der Werth eines Bruches (wie wir aus früheren Uebungen wissen,) um so größer ist, je kleiner dessen Nenner bei ein und demselben Zähler, so wird man, wie nach der 1. Berechnung, zu gleichem Resultate gelangen, wenn man den Nenner eines Bruches mit derselben ganzen Zahl dividirt und den Zähler unverändert läßt. Dividirt man also den Nenner des Bruches $^1/_4$, nämlich 4 durch 2 bei ungeändertem Zähler, so ist der Werth des Bruches jetzt 2mal so groß, d. h. der Bruch $^1/_4$ ist mit 2 vervielfacht worden. Also $_2 : {}^1/_4 = {}^1/_2$; es ist daher $^1/_4 \times 2 = {}_2 : {}^1/_4$, nämlich $^1/_2$.

2) Multiplizire $^7/_{12}$ mit 4!

1. Berechnung: 4mal $^7/_{12}$ ist gleich $^7/_{12} + {}^7/_{12} + {}^7/_{12} + {}^7/_{12}$ oder $^{28}/_{12} = 2^4/_{12} = 2^1/_3$; oder: 1mal $^7/_{12} = {}^7/_{12}$; 2mal $^7/_{12} = {}^{14}/_{12}$; 3mal $^7/_{12} = {}^{21}/_{12}$; 4mal $^7/_{12}$ also $= {}^{28}/_{12} = 2^4/_{12} = 2^1/_3$.

2. Berechnung: $_4 : {}^7/_{12} = {}^7/_3$. Wird der Nenner durch 4 dividirt, so werden die Theile 4mal so groß; bleibt nun der Zähler derselbe, so ist der Werth des Bruches 4mal so groß. $^7/_3 = 2^1/_3$; also wieder wie nach der ersten Berechnung. — Diese 2te Verfahrungsweise, Brüche zu multipliziren, wendet man jedoch nur dann an, wenn sich der Nenner eines Bruches durch die gegebene ganze Zahl ohne Rest dividiren läßt.

3) Vervielfache $^4/_5$ mit der Zahl 3!

1. Berechnung: 3mal$^4/_5 = {}^{12}/_5 = 2^2/_5$.

Die 2te Verfahrungsweise läßt sich hier nicht wol anwenden, weil die Zahl 3 in dem Nenner des Bruches $^4/_5$, nämlich in 5, nicht ohne Rest enthalten ist.

Daraus läßt sich die Regel ableiten: Ist ein Bruch durch eine ganze Zahl zu vervielfachen, so multiplizire man den Zähler mit der gegebenen Zahl und behalte für das Produkt den Nenner des Bruches unverändert als Nenner bei. Oder: Man dividire mit der gegebenen ganzen Zahl, wenn es ohne Rest geschehen kann, in den Nenner des Bruches und

behalte den Zähler desselben ungeändert als Zähler für den erhaltenen Quotienten bei.

Eine nützliche Uebung ist es, die Multiplikation der Brüche mit ganzen Zahlen in Reihen etwa auf folgende Weise erst mündlich durchzunehmen und sodann als stille Beschäftigung von den Schülern niederschreiben zu lassen; z. B.

a) $^2/_3 \times 2 = ^4/_3 = 1^1/_3$	b) $^1/_2 \times 3 = ^3/_2 = 1^1/_2$	c) $^5/_{16} \times 2 = ^{10}/_{16} = ^5/_8$
$^2/_3 \times 3 = ^6/_3 = 2$	$^2/_3 \times 3 = ^6/_3 = 2$	$^5/_{16} \times 3 = ^{15}/_{16} =$
$^2/_3 \times 4 = ^8/_3 = 2^2/_3$	$^3/_4 \times 3 = ^9/_4 = 2^1/_4$	$^5/_{16} \times 4 = ^{20}/_{16} = 1^4/_{16}$
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w. $= 1^1/_4$

Lassen sich Brüche in den Reihen auch auf die 2te Berechnungsweise multipliziren, so soll auch dieses Verfahren angewendet werden; z. B.

$\frac{5}{16} \times 4 = \frac{20}{16} = 1^4/_{16} = 1^1/_4$. Oder: $4 : \frac{5}{16} = \frac{5}{4} = 1^1/_4$; also: $\frac{5}{16} \times 4 = 4 : \frac{5}{16} = \frac{5}{4} = 1^1/_4$.

2. Multipliziren einer gemischten Zahl mit einer ganzen Zahl.

Beispiele.

1) $2^1/_6$ mit 5 multiplizirt gibt wie viel?

1. Berechnung: Die gemischte Zahl $2^1/_6$ läßt sich zerfällen in $2 + ^1/_6$; man hat also sowol 2, als auch $^1/_6$ 5mal zu nehmen; $2 \times 5 = 10$; $^1/_6 \times 5 = ^5/_6$; $10 + ^5/_6 = 10^5/_6$. Es ist also $2^1/_6 \times 5 = 10^5/_6$.

2. Berechnung: Wird die gemischte Zahl $2^1/_6$ eingerichtet, so behandelt man diesen unächten Bruch eben so, wie vorher die ächten Brüche, nämlich: $2^1/_6 = ^{13}/_6$; $^{13}/_6 \times 5 = ^{65}/_6 = 10^5/_6$.

2) Wasfür eine Zahl entsteht, wenn $7^7/_{12}$ mit 6 vervielfacht wird?

1. Berechnung: $7^7/_{12} = 7 + ^7/_{12}$; $7 \times 6 = 42$; $^7/_{12} \times 6 = ^{42}/_{12} = 3^6/_{12} = 3^1/_2$; $42 + 3^1/_2 = 45^1/_2$; also ist $7^7/_{12} \times 6 = 45^1/_2$.

2. Berechnung; $7^7/_{12} = ^{91}/_{12}$; $^{91}/_{12} \times 6 = ^{546}/_{12} = 45^6/_{12} = 45^1/_2$.

3. Berechnung: $7^7/_{12} = ^{91}/_{12}$; $6 : ^{91}/_{12} = ^{91}/_2 = 45^1/_2$.

Daraus die Regel: Ist eine gemischte Zahl mit einer ganzen Zahl zu vervielfachen, so zerlege man die gemischte Zahl, multiplizire die Ganzen und den Bruch einzeln und zähle die erhaltenen Produkte zusammen. Oder: Man richte die gemischte Zahl ein und verfahre sodann mit dem erhaltenen Bruche eben so, wie mit ächten Brüchen.

Auch hier kann man Reihen mündlich und schriftlich bilden lassen. Z. B.

a) $3^1/_2 \times 2$	b) $2^3/_5 \times 2$	c) $1^1/_2 \times 3$	d) $2^2/_3 \times 4$
$3^1/_2 \times 3$	$2^3/_5 \times 3$	$1^1/_3 \times 3$	$3^3/_4 \times 4$
$3^1/_2 \times 4$	$2^3/_5 \times 4$	$1^1/_4 \times 3$	$4^4/_5 \times 4$
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

3. Multipliziren einer ganzen Zahl mit einem Bruche.

Beispiele.

1) Multiplizire 3 mit $^1/_4$!

Beurtheilung: 1 1mal genommen ist 1;
1 $^1/_2$mal genommen ist die Hälfte von 1 oder $^1/_2$;
1 $^1/_3$mal genommen ist der 3te Theil von 1 oder $^1/_3$;
1 $^1/_4$mal genommen ist der 4te Theil von 1 oder $^1/_4$, u. s. w.
Da die Hälfte von $1 = ^1/_2$ ist, so ist die Hälfte von $2 = ^2/_2$ oder 1, die

Hälfte von 3 = $^3/_2$ oder $1^1/_2$ &c.; da der dritte Theil von 1 = $^1/_3$ ist, so ist der 3te Theil von 2 = $^2/_3$, von 3 = $^3/_3$ od. 1 &c.; da der 4te Theil von 1 = $^1/_4$ ist, so ist der 4te Theil von 2 = $^2/_4$ od. $^1/_2$, von 3 = $^3/_4$, u. s. w.

1. Berechnung: Wird 3 1mal genommen, so ist dieses 3; wird 3 $^1/_2$mal genommen, so gibt es 1mal die Hälfte von 3 oder $^3/_2$ = $1^1/_2$; wird 3 $^1/_4$mal genommen, so gibt es 1mal den 4ten Theil von 3 od. $^3/_4$. 3 mit $^1/_4$ multiplizirt gibt also zum Produkte ($3 \times {}^1/_4 =$) $^3/_4$.

2. Berechnung: Wird 3 1mal genommen, so gibt dieses 3; nun soll aber 3 nicht ganz genommen, d. h. nicht mit 1 vervielfacht werden, sondern nur mit dem vierten Theil von 1; die Zahl ist daher, da sie mit 1 vervielfacht wurde, mit einer 4mal so großen Zahl multiplizirt worden, als es hätte geschehen sollen: folglich ist auch das Produkt 4mal so groß, als es nach der Aufgabe sein sollte, und deßwegen muß man von dem Produkte ($3 \times 1 =$) 3 den 4ten Theil nehmen; der 4te Theil von 1 ist $^1/_4$; der 4te Theil von 3 also $^3/_4$. Es ist demnach $3 \times {}^1/_4 = {}^3/_4$.

2) Vervielfache 6 mit $^3/_5$!

Beurtheilung: 1 1mal genommen ist 1.

1 $^1/_5$mal genommen ist 1mal der 5te Theil von 1 oder $^1/_5$;

1 $^2/_5$mal genommen ist 2mal der 5te Theil von 1 oder $^2/_5$, da $^2/_5$ zweimal so viel oder das Zweifache von $^1/_5$ ist;

1 $^3/_5$mal genommen ist 3mal der 5te Theil von 1 oder $^3/_5$, da $^3/_5$ dreimal so viel oder das Dreifache von $^1/_5$ ist, u. s. w.

Da 3mal der 5te Theil von 1 = $^3/_5$ ist, so ist 3mal der 5te Theil von 2 = 2mal $^3/_5$ = $^6/_5$; von 3 = 3mal $^3/_5$ = $^9/_5$ = $1^4/_5$; von 4 = 4mal $^3/_5$ = $^{12}/_5$ = $2^2/_5$ u. s. w.

1. Berechnung: Wird 6 1mal genommen, so ist dieses $6 \times 1 = 6$; wird 6 $^1/_2$mal genommen, so gibt es 1mal die Hälfte von 6 oder $^6/_2 = 3$; wird 6 $^1/_5$mal genommen, so gibt es 1mal den 5ten Theil von 6 oder $^6/_5 = 1^1/_5$. — Es soll aber 6 nicht mit $^1/_5$, sondern mit $^3/_5$, also mit einer dreimal so großen Zahl oder mit dem Dreifachen von $^1/_5$ vervielfacht werden. Da nun 6 $^1/_5$mal genommen $^6/_5$ gibt, so ist das Produkt von 6 $^3/_5$mal genommen, auch 3mal $^6/_5 = {}^{18}/_5 = 3^3/_5$. Daher ist $6 \times {}^3/_5 = 3^3/_5$.

2. Berechnung: Wird 6 1mal genommen, so gibt es $6 \times 1 = 6$; wird 6 3mal genommen, so erhält man $6 \times 3 = 18$. Nun soll aber 6 nicht mit 3, sondern mit $^3/_5$, d. i. mit dem fünften Theile von 3 vervielfacht werden; es ist somit die Zahl 6, da sie mit 3 multiplizirt wurde, mit einer fünfmal so großen Zahl vervielfacht worden, als hätte geschehen sollen; folglich ist auch das Produkt ($6 \times 3 =$) 18 fünfmal so groß, als es sein sollte, weßwegen man von demselben nur den 5ten Theil zu nehmen hat; der 5te Theil von 1 ist $^1/_5$; der 5te Theil von 18 also $^{18}/_5 = 3^3/_5$. Demnach wieder $6 \times {}^3/_5 = {}^{18}/_5 = 3^3/_5$.

Daraus folgt die Regel: Soll eine ganze Zahl mit einem Bruche vervielfacht werden, so dividirt man die ganze Zahl mit dem Nenner und multiplizirt den erhaltenen Quotienten mit dem Zähler des Bruches. Oder: Man multiplizirt zuerst die ganze Zahl mit dem Zähler des Bruches und dividirt sodann das erhaltene Produkt mit dem Nenner desselben.

Uebung in Reihen.

a) $3 \times \frac{1}{2}$	b) $4 \times \frac{1}{5}$	c) $1 \times \frac{2}{3}$	d) $1 \times \frac{1}{2}$
$3 \times \frac{1}{3}$	$4 \times \frac{2}{5}$	$2 \times \frac{2}{3}$	$2 \times \frac{2}{3}$
$3 \times \frac{1}{4}$	$4 \times \frac{3}{5}$	$3 \times \frac{2}{3}$	$3 \times \frac{3}{4}$
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

4. Multipliziren einer ganzen Zahl mit einer gemischten Zahl.

Beispiel.

Vervielfache 5 mit $2\frac{2}{3}$!

1. Berechnung: Hier muß 5 mit 2 und mit $\frac{2}{3}$ vervielfacht werden. Man zerlege also die gemischte Zahl in ihre Theile, nämlich in $2 + \frac{2}{3}$, multiplizire die Zahl 5 mit jedem Theil einzeln und zähle sodann die beiden erhaltenen Produkte zusammen, also: $2\frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3}$; $5 \times 2 = 10$; $5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$; $10 + 3\frac{1}{3} = 13\frac{1}{3}$. Es ist daher $5 \times 2\frac{2}{3} = 13\frac{1}{3}$.

2. Berechnung: Richtet man die gemischte Zahl ein, nämlich $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, wodurch also ein unächter Bruch entsteht, so verfährt man ebenso, wie vorhin beim Multipliziren einer ganzen Zahl mit einem ächten Bruche gezeigt worden ist, nämlich: $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$; der 3te Theil von 5 ist $\frac{5}{3}$; der 3te Theil von 5 oder $\frac{5}{3}$ 8mal genommen ist $\frac{5}{3} \times 8 = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$. Oder: 5 8mal genommen ist $5 \times 8 = 40$, wovon man aber nur den 3ten Theil nehmen darf, d. i. $\frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$. Daher also $5 \times 2\frac{2}{3} = 5 \times \frac{8}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$.

Daraus ergibt sich die Regel: Soll eine ganze Zahl mit einer gemischten multiplizirt werden, so zerfälle man die letztere in ihre Theile, vervielfache mit diesen Theilen einzeln die ganze Zahl und addire die erhaltenen Produkte. Oder: Man richte die gemischte Zahl ein und verfahre dann ebenso, wie wenn eine ganze Zahl mit einem ächten Bruche zu vervielfachen ist.

Beispielsweise Andeutung zur Uebung in Reihen:

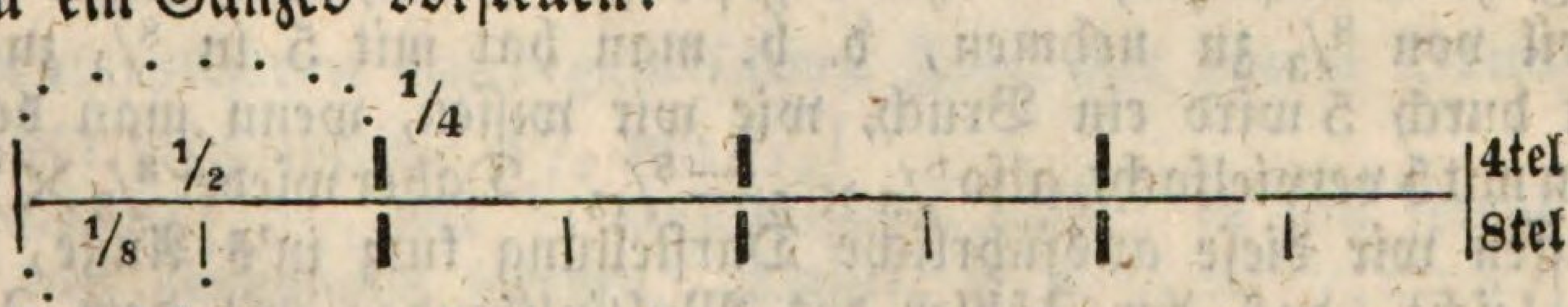
a) $1 \times 1\frac{1}{2}$	b) $1 \times 2\frac{2}{3}$	c) $3 \times 1\frac{1}{2}$	d) $4 \times 3\frac{1}{2}$	e) $5 \times 1\frac{3}{4}$
$2 \times 1\frac{1}{2}$	$2 \times 2\frac{2}{3}$	$3 \times 1\frac{1}{3}$	$4 \times 3\frac{2}{3}$	$5 \times 2\frac{3}{4}$
$3 \times 1\frac{1}{2}$	$3 \times 2\frac{2}{3}$	$3 \times 1\frac{1}{4}$	$4 \times 3\frac{3}{4}$	$5 \times 3\frac{3}{4}$
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

5. Multipliziren eines Bruches mit einem Bruche.

Beispiele.

1) Multiplizire $\frac{1}{4}$ mit $\frac{1}{2}$!

1. Berechnung: Wir gehen hier von der Anschauung aus. Folgender Strich soll ein Ganzes vorstellen:



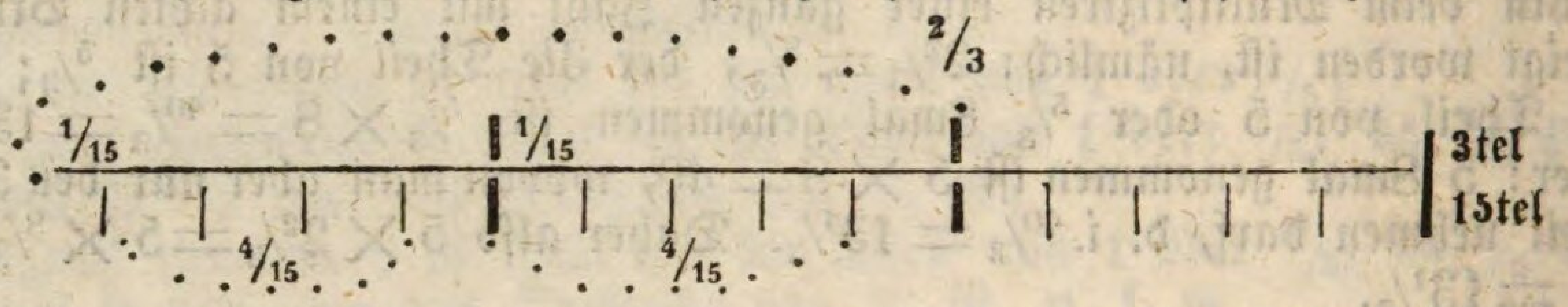
Dieses Ganze ist durch stärkere Striche in 4 gleiche Theile getheilt, welche Viertel heißen. Theilt man Ein Viertel wieder in 2 gleiche

Theile, so ist ein **solcher** Theil ein halbes Viertel. Ein solches halbes Viertel oder die Hälfte von $^1/_4$ ist aber im Vergleich zu dem Ganzen ($^4/_4$), wie an dem Striche ersichtlich nur der achte Theil des Ganzen oder $^1/_8$; denn theilt man jedes Viertel in 2 gleiche Theile, so erhält man aus dem Ganzen oder aus 4 Viertel 4mal $2 = 8$ Theile, welche eben deßwegen Achtel heißen. Wird daher $^1/_4$ nur $^1/_2$mal, von $^1/_4$ die Hälfte genommen, so erhält man, wie der Augenschein lehrt, ein halbes Viertel oder ein Achtel, oder: der halbe Theil von $^1/_4$ ist $^1/_8$. $^1/_4 \times {}^1/_2 = {}^1/_8$.

2. Berechnung: $^1/_4$ mit $^1/_2$ vervielfachen heißt: 1mal die Hälfte oder den halben Theil von $^1/_4$ nehmen. Man muß also $^1/_4$ mit 1 multipliziren und mit 2 dividiren. Dividirt wird ein Bruch, wie aus dem Vorangesagten erhellet, und wie schon aus den Vorübungen bekannt ist, wenn der Nenner des Multiplikanden, hier $^1/_4$, mit 2 vervielfacht und dessen Zähler unverändert gelassen wird. — $^1/_4$ 1mal genommen, ist $^1/_4$; $^1/_4$ $^1/_2$mal genommen $= {}^1/_8$. Es ist also $^1/_4 \times {}^1/_2 = {}^1/_8$.

2) Multiplizire $^2/_3$ mit $^4/_5$!

1. Berechnung: Wir stellen dieses zuerst wieder anschaulich dar:



Das Ganze ist durch die dickern Striche in 3 gleiche Theile (Drittel) getheilt. $^1/_3$ mit 1 vervielfacht, d. i. 1mal genommen, ist $^1/_3$; $^1/_3$ mit dem 5ten Theil von 1, d. i. mit $^1/_5$ vervielfacht, ist daher nur der 5te Theil von $^1/_3$; man muß daher $^1/_3$ in 5 gleiche Theile theilen, wovon sodann **einer** zu nehmen ist. Ein solcher Theil des in 5 Theile getheilten $^1/_3$ ist im Verhältniß zu dem Ganzen nur $^1/_{15}$, indem, wenn $^1/_3$ in 5 Theile getheilt wird, das Ganze oder 3 Drittel 3mal $5 = 15$ solche Theile gibt, was auch der Augenschein an obiger Linie lehrt. Ist somit der 5te Theil oder $^1/_5$ von $^1/_3 = {}^1/_{15}$, so ist der 5te Theil oder $^1/_5$ von $^2/_3 = {}^2/_{15}$. Nun soll aber $^2/_3$ nicht mit $^1/_5$, sondern mit $^4/_5$ vervielfacht werden, und da $^4/_5$ 4mal so viel ist als $^1/_5$, so muß auch das Produkt von $^2/_3 \times {}^1/_5$, nämlich $^2/_{15}$, 4mal genommen werden, was ($^2/_{15} \times 4 =$)$^8/_{15}$ gibt. (Vergleiche damit obige Linie.)

2. Berechnung: Wird $^2/_3$ 1mal genommen, so gibt dies $^2/_3$; wird $^2/_3$ 4mal genommen, so macht es $^2/_3 \times 4 = {}^8/_3$. Nun soll $^2/_3$ nicht 4mal, sondern nur $^4/_5$mal genommen werden. $^1/_5$ ist der 5te Theil von 1; $^4/_5$ ist daher auch der 5te Theil von 4; man hat also mit einer 5mal so großen Zahl multiplizirt, als hätte geschehen sollen, und daher ist nur der 5te Theil von $^8/_3$ zu nehmen, d. h. man hat mit 5 in $^8/_3$ zu dividiren. Dividirt durch 5 wird ein Bruch, wie wir wissen, wenn man den Nenner desselben mit 5 vervielfacht, also $^8/_{3 \times 5} = {}^8/_{15}$. Daher wieder $^2/_3 \times {}^4/_5 = {}^8/_{15}$.

Fassen wir diese ausführliche Darstellung kurz in's Auge, so bemerken wir leicht, daß der Zähler des Multiplikanden mit dem Zähler des Multiplikators, und der Nenner des Multiplikanden mit einer Zahl, die dem Nenner des Multiplikators entspricht, vervielfacht worden ist, woraus

sich somit die Regel ergibt: Soll ein Bruch mit einem Bruche vervielfacht werden, so multiplizire man den Zähler des einen Bruches mit dem Zähler des andern und so auch den Nenner des einen Bruches mit dem Nenner des andern, und behalte das Produkt aus den Zählern zum Zähler und das aus den Nennern zum Nenner des neuen Bruches als Produkt der vervielfachten Brüche.

Zusatz. Die Multiplikation eines Bruches mit einem Bruche kann man sich auch so denken:

Der Zähler des Multiplikators ($^4/_5$) zeigt an, wie oft der Zähler des Multiplikanden ($^2/_3$) genommen werden soll; der Nenner des erstern aber zeigt an, in wie viele Theile jeder Theil des Ganzen, wovon der Multiplikand selbst Theil ist, getheilt werden muß, um den so vielten Theil zu erhalten, als der Multiplikator durch seinen Nenner ausdrückt; weßwegen man nicht bloß Zähler und Zähler, sondern auch Nenner mit Nenner der gegebenen Brüche unter einander vervielfachen muß, um den Nenner für den erhaltenen Zähler zu bekommen.

Diese Multiplikation, welche zugleich auch die noch folgenden Fälle begründet, bietet die größte Schwierigkeit dar, die Schüler über das gewöhnliche Verfahren hierbei zur klaren Einsicht zu bringen. Es ist darum durchaus nöthig, daß der Lehrer auf streng richtige Auflösung dringe, viel übe und auch Reihen bilden lasse. Z. B.

a)	b)	c)	d)	e)
$^1/_2 \times {}^1/_2$	$^2/_3 \times {}^1/_2$	$^3/_4 \times {}^2/_3$	$^4/_5 \times {}^3/_4$	$^5/_6 \times {}^2/_5$
$^1/_2 \times {}^1/_3$	$^2/_3 \times {}^1/_3$	$^3/_4 \times {}^3/_4$	$^4/_5 \times {}^3/_5$	$^5/_6 \times {}^2/_6$
$^1/_2 \times {}^1/_4$	$^2/_3 \times {}^1/_4$	$^3/_4 \times {}^4/_5$	$^4/_5 \times {}^3/_6$	$^5/_6 \times {}^2/_7$
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

6. Multiplikation eines Bruches mit einer gemischten Zahl.

Beispiel: Vervielfache $^2/_5$ mit $3^1/_4$!

1. Berechnung: Es ist hier $^2/_5$ nicht nur 3mal, sondern auch noch $^1/_4$mal zu nehmen. $^2/_5 \times 3 = {}^6/_5 = 1^1/_5$; $^1/_5 \times {}^1/_4 = {}^1/_{20}$, daher $^2/_5 \times {}^1/_4 = {}^2/_{20} = {}^1/_{10}$; $1^1/_5 = 1^2/_{10}$; $1^2/_{10} + {}^1/_{10} = 1^3/_{10}$. Es macht also $^2/_5 \times 3^1/_4 = 1^3/_{10}$.

2. Berechnung: Richtet man die gemischte Zahl ein, nämlich $3^1/_4 = {}^{13}/_4$, so erhält man einen unächten Bruch, und die Aufgabe heißt nun: $^2/_5 \times {}^{13}/_4$. Die Berechnung ist jetzt dieselbe, wie vorher gezeigt worden, d. i. man multiplizirt Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner, nämlich $^2/_5 \times {}^{13}/_4 = {}^{26}/_{20} = 1^6/_{20} = 1^3/_{10}$.

Daher die Regel: Soll ein Bruch mit einer gemischten Zahl multiplizirt werden, so vervielfache man den gegebenen Bruch sowol mit der ganzen Zahl, als auch mit dem Bruche der gemischten Zahl einzeln, und addire die beiden erhaltenen Produkte. Oder: Man richte die gemischte Zahl ein, vervielfache Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner; ergibt sich ein unächter Bruch, so zieht man die Ganzen heraus.

7. Multipliziren einer gemischten Zahl mit einem Bruche.

Beispiel: Multiplizire $5^4/_7$ mit $^3/_4$!

1. Berechnung: $5^4/_7$ mit $^3/_4$ multipliziren heißt: es soll sowol 5, als auch $^4/_7$ $^3/_4$mal genommen werden. Daher: $5 \times {}^3/_4 = {}^{15}/_4 = 3^3/_4$; $^4/_7 \times {}^3/_4 = {}^{12}/_{28} = {}^3/_7$; $3^3/_4 + {}^3/_7 = 3^{21}/_{28} + {}^{12}/_{28} = 3^{33}/_{28} = 4^5/_{28}$. Also ist $5^4/_7 \times {}^3/_4 = 4^5/_{28}$.

2. Berechnung: Richtet man die gemischte Zahl ein, so ist die Operation dieselbe, wie bei dem vorhergehenden Beispiele, nämlich: $5\,{}^{4}/_{7} \times {}^{3}/_{4} = {}^{39}/_{7} \times {}^{3}/_{4} = {}^{117}/_{28} = 4\,{}^{5}/_{28}$, wie vorhin.

Daher die Regel: Soll eine gemischte Zahl mit einem Bruche multiplizirt werden, so vervielfache man sowol die ganze Zahl, als auch den Bruch der gemischten Zahl einzeln mit dem gegebenen Bruche und summire die beiden Produkte. Oder: Man richte wieder die gemischte Zahl ein, multiplizire Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner, und ziehe die Ganzen heraus.

8. Multiplizieren einer gemischten Zahl mit einer gemischten Zahl.

Beispiel: Vervielfache $5\,{}^{2}/_{3}$ mit $2\,{}^{3}/_{4}$!

1. Berechnung: Hier hat man sowol 5, als auch ${}^{2}/_{3}$ nicht nur 2mal, sondern auch noch ${}^{3}/_{4}$mal zu nehmen; folglich erhält man 4 Produkte, nämlich $5 \times 2 + {}^{2}/_{3} \times 2$, dann $5 \times {}^{3}/_{4} + {}^{2}/_{3} \times {}^{3}/_{4}$.

		12
$5 \times 2 = 10$	10	
${}^{2}/_{3} \times 2 = {}^{4}/_{3} = 1\,{}^{1}/_{3}$	$1\,{}^{1}/_{3}$	4
$5 \times {}^{3}/_{4} = {}^{15}/_{4} = 3\,{}^{3}/_{4}$	$3\,{}^{3}/_{4}$	9
${}^{2}/_{3} \times {}^{3}/_{4} = {}^{6}/_{12} = {}^{1}/_{2}$	${}^{1}/_{2}$	6
Zusammen:	$15\,{}^{7}/_{12}$	${}^{19}/_{12} = 1\,{}^{7}/_{12}$

2. Berechnung: Richtet man beide gemischte Zahlen zuerst ein, so ist das Verfahren dasselbe, wie bei den vorhergehenden Beispielen, nämlich man vervielfacht Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner, und zieht sodann die Ganzen heraus. Also: $5\,{}^{2}/_{3} = {}^{17}/_{3}$; $2\,{}^{3}/_{4} = {}^{11}/_{4}$. — ${}^{17}/_{3} \times {}^{11}/_{4} = {}^{187}/_{12} = 15\,{}^{7}/_{12}$. Es ist somit $5\,{}^{2}/_{3} \times 2\,{}^{3}/_{4} = 15\,{}^{7}/_{12}$.

Daraus folgt die Regel: Sollen gemischte Zahlen mit gemischten Zahlen multiplizirt werden, so vervielfacht man entweder jeden Theil der einen gemischten Zahl mit jedem der andern und addirt die 4 erhaltenen Produkte. Oder: Man richtet beide gemischte Zahlen ein, multiplizirt Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner, und zieht die Ganzen heraus.

Aus obiger Darstellung ist ersichtlich, daß die zweite Berechnungsweise die kürzere, und darum bei der Anwendung die empfehlenswerthere ist.

Dieses sind nun die 8 möglichen Fälle, welche beim Multipliziren der Brüche vorkommen können. Da es aber hierbei, wie bei der Multiplikation ganzer Zahlen, nicht auf die Stellung der Faktoren ankommt, indem z. B. $4 \times {}^{3}/_{5} = {}^{12}/_{5} = 2\,{}^{2}/_{5}$, und ${}^{3}/_{5} \times 4 = {}^{12}/_{5} = 2\,{}^{2}/_{5}$, also das Resultat dasselbe ist, und, wenn gegebene gemischte Zahlen eingerichtet, d. h. in unächte Brüche verwandelt werden, diese keine andere Behandlung erfordern, als gegebene ächte Brüche; so können obige 8 Fälle auf zwei Hauptfälle reduzirt werden, nämlich:

1. Multipliziren eines Bruches mit einer ganzen Zahl, und
2. Multipliziren eines Bruches mit einem Bruche.

Zusätze.

1. Selbst auch diese beiden Hauptfälle der Multiplikation mit Bruchzahlen lassen sich auf Einen zurückführen, wenn man bei einer gegebenen Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl diese letztere in Bruchform darstellt und ihr 1, was eben ein Ganzes oder Ganze andeutet,

zum Nenner gibt. Für die weitere Operation gilt sodann ebenfalls die einfache Regel: Vervielfache Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner, und ziehe die Ganzen heraus. Z. B. $^4/_5 \times 4 = {}^4/_5 \times {}^4/_1 = {}^{16}/_5 = 3^1/_5$. Ebenso: $4 \times 2^5/_8 = {}^4/_1 \times {}^{21}/_8 = {}^{84}/_8 = 10^4/_8 = 10^1/_2$. Ferner: $2^1/_3 \times 6 = {}^7/_3 \times {}^6/_1 = {}^{42}/_3 = 14$.

2. Unter den bisherigen Beispielaufgaben waren mehre, deren Produkt noch gekürzt werden konnte. Ob ein solches Kürzen nicht schon vor vollzogener Operation zulässig wäre? — Gekürzt werden die Brüche, wie bekannt, dadurch, daß man mit ein und derselben Zahl sowol in den Zähler, als auch in den Nenner dividirt, wenn solches, ohne daß ein Rest bleibt, angeht; die beiden Quotienten bilden nun den neuen, gekürzten Bruch, welcher unter kleinern Zahlen dennoch den ursprünglichen Werth ausdrückt. Zu demselben Resultate wird man auch gelangen, wenn man vor vollzogener Multiplikation der zu vervielfachenden Brüche den Zähler des einen und den Nenner des andern Faktors mit ein und derselben ganzen Zahl, insofern es ohne Rest geschehen kann, dividirt und hierauf erst die Multiplikation vornimmt. Z. B. Vervielfache $^3/_4$ mit $^4/_5$! — Berechnung: $^3/_4 \times {}^4/_5 = {}^{12}/_{20} = {}^3/_5$. Dasselbe Resultat gibt auch, nach dem eben Gesagten folgende Berechnung: $3/4 \times 4/_5 = {}^3/_5$.

Dieses letztere Verfahren ist, wie die Darstellung lehrt, das kürzere und darum in den meisten Fällen das leichtere; daher soll es allenthalben, wo es immer thunlich, angewendet werden. Die Zulässigkeit und Richtigkeit dieses Verfahrens ist leicht begreiflich, wenn man bedenkt, daß der eine Faktor (in obigem Beispiele) durch das Kürzen seines Nenners einen 4mal so großen, der andere Faktor aber durch das Kürzen seines Zählers einen 4mal kleinern Werth erhält, was sich für die Multiplikation nothwendig gegenseitig aufheben und somit dasselbe Resultat ergeben muß, wie wenn erst das Produkt der ungekürzten Faktoren gekürzt wird. Es ist hier ganz derselbe Fall, wie bei ganzen Zahlen, wenn zwei Faktoren zu zwei andern Faktoren in demselben Verhältnisse stehen, z. B. $2 \times 12 = 8 \times 3$.

Ein solches gegenseitiges Kürzen der Faktoren läßt sich bei Multiplikationen der Bruchzahlen überall anwenden, wo der Nenner des einen Faktors den Zähler des andern gerade aufhebt oder in diesem ohne Rest enthalten ist, oder wo sich der Nenner des einen und der Zähler des andern Faktors ohne Rest dividiren läßt, es mögen nun zu vervielfachen sein Brüche mit ganzen Zahlen, oder Bruchzahlen mit Bruchzahlen. An einigen Beispielen möge dieses nachgewiesen werden.

a)	$^4/_7 \times {}^7/_1 = {}^{28}/_7 = 4$	Gekürzt: $4/7 \times 7/_1 = 4$
b)	$^{24}/_1 \times {}^5/_6 = {}^{120}/_6 = 20$	„ ${}^{4}24/_1 \times 5/6 = 20$
c)	$^5/_9 \times {}^3/_8 = {}^{15}/_{72} = {}^5/_{24}$	„ $5/9_3 \times 3/_8 = {}^5/_{24}$
d)	$^{11}/_{12} \times {}^8/_9 = {}^{88}/_{108} = {}^{22}/_{27}$	„ $11/12_3 \times {}^{2}8/_9 = {}^{22}/_{27}$
e)	$^7/_8 \times {}^{11}/_{14} = {}^{77}/_{112} = {}^{11}/_{16}$	„ $7/_8 \times 11/14_2 = {}^{11}/_{16}$
f)	$^{10}/_{13} \times {}^7/_{15} = {}^{70}/_{192} = {}^{14}/_{39}$	„ ${}^{2}10/_{13} \times 7/15_3 = {}^{14}/_{39}$
g)	$^{16}/_{21} \times {}^{27}/_{40} = {}^{432}/_{840} = {}^{18}/_{35}$	„ ${}^{2}16/21_7 \times {}^{9}27/40_5 = {}^{18}/_{35}$
h)	$2^2/_3 \times {}^5/_8 = {}^8/_3 \times {}^5/_8 = {}^{40}/_{24} = 1^{16}/_{24} = 1^2/_3$	„ $2^2/_3 \times {}^5/_8 = 8/_3 \times {}^5/8 = {}^5/_3 = 1^2/_3$.
i)	$4^1/_2 \times 2^5/_6 = {}^9/_2 \times {}^{17}/_6 = {}^{153}/_{12} = 12^9/_{12} = 12^3/_4$	„ $4^1/_2 \times 2^5/_6 = {}^{3}9/_2 \times {}^{17}/6_2 = {}^{51}/_4 = 12^3/_4$.

3. Da nun gezeigt und begründet worden, daß sämmtliche möglichen Fälle, die bei der Multiplikation mit Bruchzahlen eintreten können, sich auf einen *einzigen Fall* reduziren lassen: so können auch sämmtliche, für die einzelnen Fälle aufgestellten Regeln in eine *einzige* zusammengefaßt werden, die überall und allenthalben anwendbar ist. Diese eine, *allgemeine* Regel heißt:

Sollen Brüche und ganze Zahlen, oder Bruchzahlen und Bruchzahlen miteinander multiplizirt werden, so stelle die Faktoren, Multiplikand und Multiplikator, in einfacher Bruchform dar, kürze, so oft es angeht, Zähler gegen Nenner und vervielfache sodann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner; ergibt sich hierbei ein unächter Bruch, so ziehe die Ganzen heraus.

Aufgaben.

1) Multiplizire alle Stammbrüche von $^{1}/_{2}$ bis $^{1}/_{25}$, a) mit 2, b) mit 3, c) mit 4 ꝛc. bis 9!

2) Vervielfache $^{2}/_{3}$, $^{2}/_{4}$, $^{2}/_{5}$, $^{2}/_{6}$ ꝛc. bis $^{2}/_{15}$, a) mit 2, b) mit 3, c) mit 4 ꝛc. bis 9!

3) Vervielfache $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$, $^{4}/_{5}$ ꝛc. bis $^{15}/_{16}$, a) mit 2, b) mit 3, c) mit 4 ꝛc. bis 20!

4) Multiplizire $^{5}/_{6}$ mit allen ganzen Zahlen von 1 bis 100!

5) Multiplizire $1^{1}/_{2}$, $1^{3}/_{4}$, $2^{4}/_{5}$, $3^{1}/_{6}$, $5^{5}/_{8}$, a) mit 2, b) mit 3, c) mit 4 ꝛc. bis 9!

6) Multiplizire $4^{5}/_{6}$ mit allen ganzen Zahlen von 1 bis 20!

7) Vervielfache a) 5, b) 7, c) 9, d) 12, e) 14 mit allen Stammbrüchen von $^{1}/_{2}$ bis $^{1}/_{15}$!

8) Vervielfache a) 4, b) 7, c) 9, d) 15, e) 20 mit $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$, $^{4}/_{5}$ ꝛc. bis $^{14}/_{15}$!

9) Multiplizire $^{1}/_{3}$ mit allen Stammbrüchen von $^{1}/_{2}$ bis $^{1}/_{15}$! Ebenso $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{5}$, $^{1}/_{6}$, $^{1}/_{7}$, $^{1}/_{8}$, $^{1}/_{9}$.

10) Multiplizire $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{3}$ ꝛc. bis $^{1}/_{12}$, a) mit $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$ ꝛc. bis $^{11}/_{12}$!

11) Vervielfache a) $^{3}/_{4}$ mit $^{3}/_{4}$, b) $^{3}/_{5}$ mit $^{5}/_{6}$, c) $^{4}/_{7}$ mit $^{5}/_{8}$, d) $^{5}/_{6}$ mit $^{7}/_{10}$, e) $^{5}/_{8}$ mit $^{6}/_{7}$, f) $^{4}/_{5}$ mit $^{5}/_{9}$, g) $^{7}/_{10}$ mit $^{13}/_{14}$, h) $^{5}/_{12}$ mit $^{8}/_{9}$!

12) Multiplizire $3^{1}/_{2}$ mit $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{3}$, $^{1}/_{4}$ ꝛc. bis $^{1}/_{9}$!

13) Multiplizire $2^{3}/_{4}$ mit $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$ ꝛc. bis $^{11}/_{12}$!

14) Vervielfache $^{3}/_{5}$ a) mit $1^{1}/_{2}$, b) mit $1^{1}/_{3}$, c) mit $1^{1}/_{4}$, d) mit $2^{2}/_{3}$, e) mit $2^{3}/_{4}$, f) mit $3^{1}/_{5}$, g) mit $3^{5}/_{6}$, h) mit $4^{1}/_{8}$!

15) Vervielfache $2^{1}/_{2}$ a) mit $1^{1}/_{2}$, b) mit $1^{1}/_{4}$, c) mit $1^{2}/_{3}$, d) mit $3^{2}/_{3}$, e) mit $3^{3}/_{4}$, f) mit $4^{1}/_{2}$, g) mit $4^{2}/_{3}$, h) mit $4^{3}/_{4}$. Ferner: $3^{3}/_{5}$ a) mit $1^{3}/_{5}$, b) mit $2^{5}/_{6}$, c) mit $3^{3}/_{4}$, d) mit $3^{4}/_{5}$, e) mit $5^{1}/_{5}$, f) mit $5^{2}/_{5}$, g) mit $5^{3}/_{5}$, h) mit $5^{4}/_{5}$, i) mit $6^{1}/_{9}$ ꝛc.!

NB. Bei schwierigeren Aufgaben gestatte der Lehrer den Schülern die einzelnen Produkte niederschreiben zu dürfen.

Angewandte Aufgaben.

1) Eine Elle Leinwand gilt $^{5}/_{8}$ fl., wie hoch kommen 7 Ellen?
Berechnung: 7 Ellen sind 7mal so viel als 1 Elle; daher werden 7 Ellen auch 7mal $^{5}/_{8}$ fl. gelten. $7 \times \frac{5}{8} = {}^{35}/_{8} = 4^{5}/_{8}$ fl. Antwort: 7 Ellen Leinwand gelten $4^{3}/_{8}$ fl.

2) Ein Hundert Gulden bringen $4^{2}/_{3}$ fl. Zins ein; wie viel Zins bringen 9 Hundert Gulden?
Berechnung: 9 Hundert Gulden sind 9mal 1 Hundert Gulden; daher werden 9 Hundert Gulden auch 9mal $4^{2}/_{3}$ fl. Zins bringen. $9 \times 4^{2}/_{3}$ fl. $= 9 \times (4 + {}^{3}/_{4})$; $9 \times 4 = 36$, und $9 \times \frac{3}{4} = \frac{27}{4} = 6^{3}/_{4}$; $36 + 6^{3}/_{4} =$

$42^3/_4$ fl. Zins. Oder: $9 \times 4^3/_4 = \frac{9 \times 19}{4} = {}^{171}/_4 = 42^3/_4$ fl. — Antwort: 9 Hundert Gulden bringen $42^3/_4$ fl. Zins.

3) Wenn der Eimer Branntwein 11 fl. gilt; wie hoch kommen sodann $^5/_6$ Eimer?
Berechnung: $^5/_6$ Eimer sind $^5/_6$mal so viel als 1 Eimer; es gelten daher $^5/_6$ Eimer auch $^5/_6$mal 11 fl. $^1/_6 \times 1 = {}^1/_6$; $\frac{1 \times 11}{6} = {}^{11}/_6$; $\frac{5 \times 11}{6}$ $5 \times {}^{11}/_6 = {}^{55}/_6 = 9^1/_6$ fl.; oder $^5/_6 \times 11 = {}^{55}/_6 = 9^1/_6$ fl. — Antw. $^5/_6$ Eimer gelten $9^1/_6$ fl.

4) Ein Fuhrmann verlangt für den Zentner bis nach einer gewissen Station hin 5 fl. Fracht; was wird man ihm für $8^3/_4$ Ztr. bezahlen müssen?
Berechnung: $8^3/_4$ Ztr. sind $8^3/_4$mal 1 Ztr.; man wird daher auch $8^3/_4$mal 5 fl. zu bezahlen haben. $8^3/_4 \times 5$ fl. $= 8 \times 5$ und $\frac{3 \times 5}{4}$; $8 \times 5 = 40$, $\frac{3 \times 5}{4} = {}^{15}/_4 = 3^3/_4$; $40 + 3^3/_4 = 43^3/_4$ fl. Oder: $8^3/_4 \times 5 = \frac{35 \times 5}{4}$ $^{175}/_4 = 43^3/_4$ fl. — Antw. Für $8^3/_4$ Ztr. hat man $43^3/_4$ fl. zu bezahlen.

5) 1 ℔ Tabak gilt $^7/_8$ fl.; wie hoch kommen $^3/_4$ ℔?
Berechnung: $^3/_4$ ℔ sind $^3/_4$mal 1 ℔; daher gelten $^3/_4$ ℔ auch nur $^3/_4$mal $^7/_8$ fl. $^3/_4 \times {}^7/_8 = {}^{21}/_{32}$ fl. Antw. $^3/_4$ ℔ Tabak gelten $^{21}/_{32}$ fl.

6) Ein Landmann säet $8^1/_3$ Schfl. Gerste und $^4/_5$mal so viel Roggen aus; wie viel Schäffel Roggen säete er aus?
Berechnung: Roggen säete er $^4/_5$mal $8^1/_3$ Schfl. aus; $^4/_5 \times 8^1/_3 = {}^4/_5 \times {}^{25}/_3 = {}^{100}/_{15} = 6^{10}/_{15} = 6^2/_3$ Schfl. Oder: $^4/_5 \times 8^1/_3 = \frac{4 \times 25^5}{5 \quad 3} = {}^{20}/_3 = 6^2/_3$ Schfl. — Antw. Roggen säet er $6^2/_3$ Schfl. aus.

7) Ein Oekonom hat $^5/_6$ Tagwerk Acker mit Leinsamen und $2^2/_3$mal so viel Tagwerk sind mit Klee angebaut; wie viel Tagwerk sind mit Klee bebaut?
Berechnung: Mit Klee sind $2^2/_3$mal $^5/_6$ Tagwerk bebaut. $2^2/_3 \times {}^5/_6 = {}^8/_3 \times {}^5/_6 = {}^{40}/_{18} = {}^{20}/_9 = 2^2/_9$ Tgw. Oder: $2^2/_3 \times {}^5/_6 = \frac{8^4 \times 5}{3 \quad 6^3} = {}^9/_{20} = 2^2/_9$ Tgw. Antw. Mit Klee sind $2^2/_9$ Tagw. bebaut.

8) In einem Gasthofe verbraucht man durchschnittlich in einem Monate $2^5/_8$ Ztr. Fleisch; wie viel beträgt der Verbrauch in $3^1/_9$ Monaten?
Berechnung: In $3^1/_9$ Monaten verbraucht man $3^1/_9$mal $2^5/_8$ Ztr. Fleisch. $3^1/_9 \times 2^5/_8 = \frac{28^7}{9_3} \times \frac{21^7}{8_2} = {}^7/_3 \times {}^7/_2 = {}^{49}/_6 = 8^1/_6$ Ztr. Antw. In $3^1/_9$ Monaten verbraucht man $8^1/_6$ Ztr. Fleisch.

9) Eine Hausfrau kauft $3^3/_8$ ℔ Kaffee, das Pfund zu $^3/_5$ fl., $4^1/_2$ ℔ Zucker, das Pfund zu $^5/_{12}$ fl.; wie viel Geld bleibt ihr noch übrig, wenn sie 7 fl. bei sich hat?
Berechnung: $3^3/_8$ ℔ Kaffee gelten $3^3/_8$mal $^3/_5$ fl.; $3^3/_8 \times {}^3/_5 = {}^{27}/_8 \times {}^3/_5 = {}^{81}/_{40} = 2^1/_{40}$ fl. — $4^1/_2$ ℔ Zucker kosten $4^1/_2$mal $^5/_{12}$ fl.; $4^1/_2 \times {}^5/_{12} = \frac{9^3}{2} \times \frac{5}{12_4} = {}^3/_2 \times {}^5/_4 = {}^{15}/_8 = 1^7/_8$ fl. — $2^1/_{40} + 1^7/_8 = 2^1/_{40} + 1^{35}/_{40} = 3^{36}/_{40} =$

$3^9/_{10}$ fl. beträgt die Gesammtausgabe. — $7 - 3^9/_{10} = 3^1/_{10}$ fl. Rest. Antw. Der Frau blieb noch an Geld übrig $3^1/_{10}$ fl.

10) Jemand kauft sich $1^3/_4$ Ellen Tuch zu Beinkleidern, die Elle zu 4 fl. 40 kr.; dann $3^2/_5$ Ellen Tuch zu einem Rock, die Elle zu $4^7/_8$ fl. a) Was hat er für sämmtliches Tuch zu bezahlen? b) Wie viel muß er noch darauf legen, wenn er 13 prß. Thaler hingibt?

Berechnung: Die Kreuzer verwandeln wir zuerst in einen Guldenbruch; 40 kr. $= ^2/_3$ fl. — Da von der ersten Tuchsorte 1 Elle $4^2/_3$ fl. kostet, so kommen $1^3/_4$ Ellen auf $1^3/_4 \times 4^2/_3$ fl. $= \frac{7}{4_2} \times \frac{14^7}{3} = ^7/_2 \times ^7/_3 = ^{49}/_6 = 8^1/_6$ fl. Von der zweiten Tuchsorte gilt 1 Elle $4^7/_8$ fl.; daher $3^3/_5$ Ellen $3^3/_5 \times 4^7/_8$ fl. $= \frac{18^9}{5} \times \frac{39}{8_4} = ^9/_5 \times ^{39}/_4 = ^{351}/_{20} = 17^{11}/_{20}$ fl. — $8^1/_6 + 17^{11}/_{20} = 8^{10}/_{60} + 17^{33}/_{60} = 25^{43}/_{60}$ fl. gilt sämmtliches Tuch.

b) 1 prß. Thlr. $= 1^3/_4$ fl. 13 prß. Thlr. also $13 \times 1^3/_4$ fl. $= 13 \times ^7/_4 = ^{91}/_4 = 22^3/_4$ fl. — $25^{43}/_{60} - 22^3/_4 = 25^{43}/_{60} - 22^{45}/_{60} = 2^{58}/_{60} = 2^{29}/_{30}$ fl. Rest. Antw. a) Im Ganzen hat er für das Tuch $25^{43}/_{60}$ fl. zu bezahlen. b) Wenn er 13 prß. Thaler hingibt, so hat er noch $2^{29}/_{30}$ fl. darauf zu zahlen.

Die Multiplikation mit Brüchen angewendet auf die Resolution übergeordneter Größen.

1) Wie viele Kreuzer machen $^4/_5$ fl.?

1. Berechnung: 1 fl. $=60$ kr.; $^1/_5$ fl. also $\frac{1 \times 60}{5} = ^{60}/_5 \times 12$ kr.: $^4/_5$ fl. demnach $4 \times 12 = 48$ kr.

2. Berechnung: 1 fl. $= 60$ kr; 4 fl. $= 4 \times 60 = 240$ kr. Da aber $^4/_5$ fl. nur der 5. Theil von 4 fl., oder $^4/_5$ nur $^4/_5$mal 1 fl. ist, so geben $^4/_5$ fl. auch nur $\frac{4 \times 60}{5} = ^{240}/_5 = 48$ kr., oder $\frac{4 \times 60^{12}}{5} = 48$ kr.

2) $^5/_8$ ℔ sind wie viele Loth?

1. Berechnung: 1 ℔ $= 32$ Loth; $^1/_8$ ℔ also $= ^{32}/_8$ Loth $= 4$ Loth; $^5/_8$ ℔ daher $5 \times 4 = 20$ Loth.

2. Berechnung: 1 ℔ $= 32$ Lth.; 5 ℔ $= 5 \times 32 = 160$ Lth.; $^5/_8$ ℔ daher $\frac{5 \times 32}{8} = ^{160}/_8 = 20$ Lth.; oder $\frac{5 \times 32^4}{8} = 5 \times 4 = 20$ Lth.

3) $^7/_{12}$ Schäffel, wie viel Dreißiger?

1. Berechnung: 1 Schfl. $= 6$ Metzen; 1 Metz. $= 32$ Drßgr.; 1 Schfl. od. 6 Metz. $= 6 \times 32 = 192$ Drßgr. $^1/_{12}$ Schfl. also $^{192}/_{12} = 16$ Drßgr.; $^7/_{12}$ Schfl. daher $7 \times 16 = 112$ Drßgr.

2. Berechnung: 1 Schfl. $= 192$ Drßgr.; 7 Schfl. also $7 \times 192 = 1344$ Drßgr.; $^7/_{12}$ daher $\frac{7 \times 192}{12} = \frac{1344}{12} = 112$ Drßgr.

Oder $^7/_{12}$ Schfl. $= \frac{7 \times 192^{16}}{12} = (7 \times 16 =)\ 112$ Drßgr.

4) $^5/_6$ Jahre sind wie viele Tage?
1. Berechnung: 1 Jahr $=365$ Tage; $^1/_6$ Jahr also $= ^{365}/_6 = 60^5/_6$ Tage; $^5/_6$ Jahre daher $5 \times 60^5/_6 = (5 \times 60 = 300$ und $5 \times ^5/_6 = ^{25}/_6 = 4^1/_6) = 304^1/_6$ Tage. $^5/_6$ Jahre sind also $304^1/_6$ Tage.
2. Berechnung: 1 Jahr $=365$ Tage; 5 Jahre $= 5 \times 365 = 1825$ Tage; $^5/_6$ Jahre daher $\frac{5 \times 365}{6} = \frac{1825}{6} = 304^1/_6$ Tage.

5) $2^3/_5$ Fuß geben wie viel Zoll (zehntheilig)?
1. Berechnung: 1 Fuß $= 10$ Zoll; $2^3/_5$ Fuß $= 2^3/_5 \times 10$ Zoll; $2 \times 10 = 20$ Zoll; $^3/_5$ Fuß $= \frac{3 \times 10}{5} = \frac{30}{5} = 6$ Zoll; $20 + 6 = 26$ Zoll.
2. Berechnung: 1 Fuß $= 10$ Zoll; $2^3/_5 = ^{13}/_5$ Fuß; $^1/_5$ Fuß $= ^{10}/_5 = 2$ Zoll; $^{13}/_5$ Fuß $= 13 \times 2 = 26$ Zoll.
3. Berechnung: 1 Fuß $=10$ Zoll, $2^3/_5$ Fuß $= ^{13}/_5$ Fuß; 13 Fuß $= 13 \times 10 = 130$ Zoll; $^{13}/_5$ Fuß $= \frac{13 \times 10}{5} = \frac{130}{5} = 26$ Zoll. Oder: $\frac{13 \times 10^2}{5} = 13 \times 2 = 26$ Zoll.

$1^6/_7$ Quadratruthen sind wie viel Quadratfuß (12 theilig)?
1. Berechnung: 1 Quadratruthe $= 144$ Quadratfuß; $1^6/_7$ Q.-R. $= 1^6/_7 \times 144$ Q.-F.; $1 \times 144 = 144$ Q.-F.; $\frac{6 \times 144}{7} = \frac{468}{7} = 123^3/_7$ Q.-F. $144 + 123^3/_7 = 267^3/_7$ Q.-F.
2. Berechnung: 1 Q.-R. $= 144$ Q.-F.; $1^6/_7$ Q.-R. $= ^{13}/_7$ Q.-R.; $^1/_7$ Q.-R. $= ^{144}/_7 = 20^4/_7$ Q.-F; $^{13}/_7$ Q.-R. $= 13 \times 20^4/_7 = 267^3/_7$ Q.-F.
3. Berechnung: 1 Q.-R. $= 144$ Q.-F.; $1^6/_7$ Q.-R. $= ^{13}/_7$ Q.-R.; 13 Q.-R. $= 13 \times 144 = 1872$ Q.-F.; $^{13}/_7$ Q.-R. $= \frac{13 \times 144}{7} = \frac{1872}{7} = 267^3/_7$ Quadrat-Fuß.

Aus diesen Beispielen ergibt sich die allgemeine Regel: **Soll eine benannte Bruchzahl in eine untergeordnete Größe aufgelös't (resolvirt) werden, so multiplizire man die Reduktionszahl (od. Währungszahl) mit dem Zähler des Bruches und dividire mit dem Nenner desselben das erhaltene Produkt; der Quotient gibt die verlangte Größe.** —

Die Multiplikation mit Brüchen angewendet auf die Reduktion untergeordneter Größen in übergeordnete Größen.

1) 23 Kreuzer machen wasfür einen Guldenbruch?
Berechnung: 60 kr. $= 1$ fl.; 1 kr. also $= ^1/_{60}$ fl.; 23 kr. demnach $\frac{23 \times 1}{60} = \frac{23}{60}$ fl.

2) 24 Loth, wie viel Pfund?
Berechnung: 32 Lth. $= 1$ ℔; 1 Lth. $= ^1/_{32}$ ℔; 24 Lth. also $\frac{24 \times 1}{32} = ^{24}/_{32} = ^3/_4$ ℔. Oder: $\frac{24^3 \times 1}{32_4} = ^3/_4$ ℔.

3) 185 Tage, wie viel Jahre?
Berechnung: 365 Tage = 1 Jahr; 1 Tag = $^1/_{365}$ Jahr; 185 Tage also $\frac{185 \times 1}{365} = {}^{185}/_{365} = {}^{37}/_{73}$ Jahr. Oder: $\frac{185^{37} \times 1}{365_{73}} = {}^{37}/_{73}$ Jahr.

4) 27 Dreißiger machen wie viel Schäffel?
Berechnung: 32 Drßgr. = 1 Metzen; 6 Metzen oder $6 \times 32 = 192$ Drßgr. = 1 Schfl.; 1 Drßgr. = $^1/_{192}$ Schfl.; 27 Drßgr. daher = $\frac{27 \times 1}{192}$ = $^{27}/_{192} = {}^9/_{64}$ Schfl. Oder: $\frac{27^9 \times 1}{192_{64}} = {}^9/_{64}$ Schfl.

5) 31 kr. 7 hl., wie viel Gulden?
Berechnung: (1 kr. = 8 hl.; 31 kr. = $31 \times 8 = 248$ hl.; $248 + 7 = 255$ hl.) — 480 hl. = 1 fl.; 1 hl. = $^1/_{480}$ fl.; 255 hl. daher = $\frac{255 \times 1}{480}$ = 255/480 = $^{17}/_{32}$ fl. — 31 kr. 7 hl. sind $^{17}/_{32}$ fl.

6) 3 Fuß 7 Zoll 6 Linien (zwölftheiliges Maß) geben wie viel Ruthen (zwölftheilig)?
Berechnung: (3 Fuß 7 Zoll = $3 \times 12 + 7 = 36 + 7 = 43$ Zoll; 43 Zoll 6 Linien = $43 \times 12 + 6 = 516 + 6 = 522$ Linien). ($12 \times 12 \times 12 =$) 1728 Linien = 1 Ruthe; 1 Linie = $^1/_{1728}$ Rth.; 522 Linien daher $\frac{522 \times 1}{1728} = \frac{522}{1728} = {}^{29}/_{96}$ Rth. — 3 F. 7 Z. 6 Lin. sind $^{29}/_{96}$ Rth.

Regel: Um eine benannte untergeordnete Größe in einen Bruch der übergeordneten Größe zurückzuführen (zu reduziren), verwandle man zuerst die Einheit (1) der gegebenen untergeordneten Größe in einen Bruch der verlangten übergeordneten dadurch, daß man diese Einheit (1) zum **Zähler** und die Reduktions- oder Währungszahl zum **Nenner** nimmt; den Zähler dieses Bruches multiplizirt man sodann mit der gegebenen Anzahl der untergeordneten Größe und gibt diesem Produkte den Nenner des Bruches zum Nenner. — Sind mehre untergeordnete Größen gegeben, so werden diese gleichnamig gemacht, d. h. man lös't vorerst Alles in die kleinste Benennung auf.

Oder — kürzer: **Man nimmt die Anzahl der untergeordneten Größe zum Zähler und die Reduktions- oder Währungszahl zum Nenner.** Der dadurch erhaltene Bruch drückt den Werth der gegebenen Größe in der übergeordneten Größe aus. Kann der Bruch gekürzt werden, so geschieht dieses. —

Aufgaben.

1) Unter 5 Arme wurde Holz und Getreide vertheilt. Jeder erhielt $^7/_8$ Klafter Holz und $1^1/_3$ Metzen Getreide; wie viel Klafter Holz, und wie viel Metzen Getreide wurde unter sie vertheilt?

2) Wenn die Elle Tuch $3^3/_5$ fl. gilt; wie hoch kommen dann 9 Ellen?

3) Ein fahrender Bote besorgt einem Kaufmanne 3 Fuhren, jede Fuhre mit $13^5/_6$ Ztr. Waare beladen. Für jeden Zentner wird $2^4/_5$ fl. Fracht bezahlt; wie viel betrug die Frachtzahlung?

4) Ein Landkrämer läßt sich $^1/_2$ Ztr. Kaffee, $^2/_3$ Ztr. Zucker, $^5/_8$ Ztr. Reiß und $^3/_5$ ℔ Gewürz kommen; was hat er für jede Sorte zu bezahlen, wenn der Zentner Kaffee 55 fl., der Zentner Zucker 46 fl., der Ztr. Reiß 23 fl. und das ℔ Gewürz 17 fl. kostet?

5) Ein Gutsbesitzer bringt $5\frac{1}{3}$ Ztr. Wolle auf den Wollmarkt und verkauft den Ztr. um 72 fl.; wie viel Geld erhält er?

6) $4\frac{3}{4}$ Rieß Schreibpapier, wovon das Rieß 5 fl. kostet, sind von $26\frac{2}{3}$ fl. bezahlt worden; wie viel Geld blieb noch übrig?

7) Wenn das Pfund Kaffe $\frac{2}{3}$ fl. und das Pfund Zucker $\frac{5}{8}$ fl. kostet; was hat man a) für $\frac{1}{2}$ Pfund Kaffee und für $\frac{3}{4}$ ℔ Zucker zu bezahlen? b) was macht dies zusammen?

8) Anton verdient sich täglich $\frac{4}{5}$ fl., sein jüngerer Bruder aber nur $\frac{2}{3}$mal soviel; was verdient sich dieser täglich? und wie groß ist der Verdienst Beider?

9) Wenn die Klafter Holz $9\frac{3}{5}$ fl. gilt, was hat man für $\frac{3}{4}$ Klafter zu bezahlen?

10) Eine arme Familie erhält von einem Herrn $2\frac{5}{6}$ fl. und von einem andern $\frac{3}{5}$mal so viel; wie viel gab der andere Herr? wie viel gaben beide? und wie viel der eine mehr als der andere?

11) Auf einen Acker wurden $5\frac{5}{8}$ Metzen Roggen ausgesäet, von welchem sodann das $7\frac{1}{6}$-Fache geärntet wurde; wie viel Metzen wurden geärntet? wie viel Metzen über die Aussaat?

12) Herr N. erhielt eine Rechnung, wonach er für $5\frac{1}{4}$ Ellen Tuch à $3\frac{2}{3}$ fl. $= 20\frac{1}{2}$ fl., und für 7 Ellen Futter à $\frac{3}{5}$ fl. $= 4\frac{4}{5}$ fl., zusammen — ? fl. zahlen sollte. Er hatte diese nicht nachgerechnet und bezahlte daher die verlangte Summe; um wie viel hatte er sich betrügen lassen?

13) Ernst fragte einen größern Knaben, wie alt dieser wäre. Dieser gab zur Antwort: „Ich bin $1\frac{1}{4}$mal so alt als du, und $2\frac{5}{6}$mal so alt als deine Schwester." Wenn die Schwester des Ernst nun $4\frac{1}{2}$ Jahre und Ernst $10\frac{1}{5}$ Jahre alt ist; wie alt ist der größere Knabe? um wie viele Jahre älter als Ernst? und dann als dessen Schwester? und — war die Angabe richtig?

14) Von einem Gute zu 136 Tagwerk werden $\frac{2}{7}$mal soviel verkauft; von dem Uebrigbleibenden $\frac{5}{8}$mal so viel verpachtet. Wie viel Tagwerke wurden verkauft? wie viel verpachtet? und wie viel blieben noch übrig?

15) Drei Gemeinden haben Haber zu liefern. Die Gemeinde A $1\frac{3}{5}$mal soviel als B, und die Gemeinde B $\frac{7}{8}$mal soviel als C. Wenn nun die Gemeinde C $18\frac{2}{3}$ Schfl. Haber zu liefern hat; wie viel Schfl. müssen Gemeinde A und B zusammen? dann alle drei Gemeinden zusammen liefern? Wie viel Schfl. jede Gemeinde mehr als die andere?

16) $\frac{7}{15}$ fl. geben wie viel Kreuzer?
17) $\frac{15}{16}$ ℔., wie viel Loth? dann wie viel Quint?
18) $\frac{5}{8}$ Jahr, wie viel Tage?
19) $\frac{7}{12}$ Monate wie viel Tage? wie viel Stunden?
20) $\frac{7}{9}$ Fuß (zehn-, dann zwölftheilig) wie viel Linien?
21) 42 Kreuzer machen was für einen Guldenbruch?
22) 33 kr. 3 pf., wie viel Gulden?
23) 27 Loth, wie viel Pfund?
24) 21 Stunden, wie viel Wochen?
25) 7 ℔. 22 Lth, 2 Qt., wie viel Zentner?

b) Schriftliche Darstellung.

Durch die mündlichen Uebungen ist das Multipliziren mit Brüchen hinlänglich begründet und für das schriftliche Verfahren, welches mit dem mündlichen übereinstimmt, vorbereitet. Die schriftliche Behandlung der Brüche beim Multipliziren bietet daher auch keine Schwierigkeiten dar, wie nachfolgende berechnete Beispiele lehren.

Seite 100 ist gezeigt worden, daß die 8 möglichen Fälle, welche beim Multipliziren der Brüche vorkommen, sich auf einen Einzigen zurückführen lassen, und daher können alle Multiplikations-Aufgaben dieser Art schriftlich nach folgender allgemeinen Regel berechnet werden:

Stelle Alles — beide Faktoren — in einfacher Bruchform dar, multiplizire Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Ergibt sich dadurch ein unächter Bruch, so zieht man die Ganzen heraus.

Beispiele mit unbenannten Bruchzahlen.

1) Multiplizire $\frac{4}{5}$ mit 7!
Ansatz und Berechnung: $\frac{4}{5} \times 7 = \frac{4}{5} \times \frac{7}{1} = \frac{28}{5} = 5\frac{3}{5}$.
Antw. $\frac{4}{5}$ mit 7 multiplizirt ist $5\frac{3}{5}$.

Erklärung. $\frac{4}{5}$ soll 7mal genommen werden; 7 ist daher der Multiplikator. $7 = \frac{7}{1}$, d. h. 7 Eintel oder 7 Ganze. 7mal $\frac{1}{5}$ ist $\frac{7}{5}$; 7mal $\frac{4}{5}$ ist $\frac{28}{5}$. Man multiplizirt also den Zähler 4 mit dem Zähler 7, $= 28$, sodann den Nenner 5 mit dem Nenner 1, $= 5$, und erhält somit den unächten Bruch $\frac{28}{5}$, der sodann, wenn man die Ganzen durch Division des Nenners in den Zähler herauszieht, eine gemischte Zahl ergibt, nämlich: $5\frac{3}{5}$.

2) Vervielfache $\frac{23}{32}$ mit 12!
Ansatz und Berechnung: $\frac{23}{32} \times 12 = \frac{23}{32_8} \times \frac{12^3}{1} = \frac{69}{8} = 8\frac{5}{8}$.
Antw. $\frac{23}{32}$ mit 12 multiplizirt ist $8\frac{5}{8}$.

Erklärung. Der Multiplikator 12 in Bruchform dargestellt $= \frac{12}{1}$. Man multiplizirt nun wieder Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Hier läßt sich aber der Nenner des Multiplikandus $\frac{23}{32}$ gegen den Zähler des Multiplikators $\frac{12}{1}$ durch 4 kürzen, und wir erhalten sodann zur Multiplikation die Brüche $\frac{23}{8} \times \frac{3}{1} = \frac{69}{8} = 5\frac{5}{8}$.

(So oft sich ein Nenner gegen einen Zähler kürzen oder ganz aufheben läßt, soll solches, um die Berechnung zu erleichtern und abzukürzen, geschehen.)

3) Multiplizire 39 mit $\frac{17}{20}$!
Ansatz und Berechnung: $39 \times \frac{17}{20} = \frac{39}{1} \times \frac{17}{20} = \frac{663}{20} = 33\frac{3}{20}$.

```
a)  39        b)  20        c)  2(0:66(3 = 33 3/20.
    17             1             6
   ---           ---            --
   273            20            -6
   39                            6
   ---                          --
   663                          -3/20
```

Antw. 39 mit $\frac{17}{20}$ multiplizirt ist $33\frac{3}{20}$.

Erklärung. Hier mußte der Multiplikandus 39 in Bruchform dargestellt werden, nämlich $39 = \frac{39}{1}$. Bei a) sind die beiden Zähler, bei b) die beiden Nenner vervielfacht worden, woraus sich dann der unächte Bruch $\frac{663}{20}$ ergibt; bei c) wurden durch Division die Ganzen herausgezogen, wodurch die gemischte Zahl $33\frac{3}{20}$ entsteht.

4) Wie viel macht $357\frac{45}{59}$ mit 137 vervielfacht?
Ansatz und Berechnung: $357\frac{45}{59} \times 137 = \frac{21108}{59} \times \frac{137}{1} = \frac{2891796}{59} = 49013\frac{19}{59}$.

```
a)  357 45/59    b) 137 = 137/1    c)  21108     e) 59:2891796 = 49013 29/59
   ----------                            137         236
    3258                             -------         ----
    1785         d) 59                147756         -531
   -----              1                63324          531
   21103/59          --               21108          ----
                     59              -------         ---79
                                     2891796           59
                                                      ---
                                                      206
                                                      177
                                                      ---
                                                     -29/59
```

Antwort: $357^{45}/_{59}$ mit 137 vervielfacht macht $49013^{29}/_{59}$.

Erklärung. Unter a) wurde die gemischte Zahl zuerst eingerichtet (in einen unächten Bruch), d. h. in $^{21108}/_{59}$ verwandelt; sodann wurde unter b) der andere Faktor (137) in Bruchform dargestellt (in Eintel verwandelt); ferner wurden unter c) Zähler und Zähler, und unter d) Nenner und Nenner mit einander multiplizirt, wodurch man den unächten Bruch $^{2891796}/_{59}$ erhält, aus welchem unter e) die Ganzen gezogen worden sind, was $49013^{29}/_{59}$ gibt.

5) Wie viel ist $^{79}/_{213}$ multiplizirt mit $^{378}/_{569}$?

Ansatz und Berechnung: $^{79}/_{213} \times {}^{378}/_{569} = {}^{29862}/_{121197} = \underbrace{}_{3} {}^{9954}/_{40399}$.

$$\text{a)}\ \begin{array}{r} 378 \\ \underline{79} \\ 3402 \\ 2646 \\ \hline 29862 \end{array} \text{(Zähler.)} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{r} 569 \\ \underline{213} \\ 1707 \\ 569 \\ 1138 \\ \hline 121197 \end{array} \text{(Nenner.)} \qquad \text{c)}\ \frac{29862}{121497} \Big| \frac{9954}{40399}$$

Oder:

Da sich der Nenner 213 und der Zähler 378 durch 3 kürzen lassen, so wird diese Kürzung vor der Multiplikation vorgenommen, nämlich:

$$3)\frac{79}{\cancel{213}_{71}} \times \frac{\overset{126}{\cancel{378}}}{569} = \frac{79}{71} \times \frac{126}{569} = \frac{9954}{40399}.$$

$$\text{a)}\ \begin{array}{r} 126 \\ \underline{79} \\ 1134 \\ 882 \\ \hline 9954 \end{array} \text{(Zähler.)} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{r} 569 \\ \underline{71} \\ 569 \\ 3983 \\ \hline 40399 \end{array} \text{(Nenner.)}$$

Antwort: $^{79}/_{113}$ mit $^{378}/_{569}$ multiplizirt macht $^{9954}/_{40399}$.

Erklärung. Unter a) sind die beiden Zähler, unter b) die beiden Nenner miteinander vervielfacht und unter c) ist der hieraus entstandene Bruch mit 3 gekürzt worden. — Wird schon vor der Multiplikation der Nenner des einen Faktors und der Zähler des andern mit 3 gekürzt, so erhält man durch die nachfolgende Multiplikation einen Bruch, der dem vorhin unter c) gekürzten gleich ist.

6) Wie viel beträgt $87^{14}/_{15} \times {}^{29}/_{32}$?

Ansatz und Berechnung: $87^{14}/_{15} \times {}^{29}/_{32} = {}^{1319}/_{15} \times {}^{29}/_{32} = {}^{38251}/_{480} = 79^{331}/_{480}$.

$$\text{a)}\ \begin{array}{r} \underline{87^{14}/_{15}} \\ 449 \\ \underline{87} \\ 1319/_{15} \end{array} \qquad \text{b)}\ \left.\begin{array}{r} 1319 \\ 29 \end{array}\right\}(3.) \begin{array}{r} \\ \\ \hline 11871 \\ 2638 \\ \hline 38251 \end{array} \qquad \text{c)}\ \left.\begin{array}{r} 32 \\ 15 \end{array}\right\}(\text{N.}) \begin{array}{r} \\ \\ \hline 160 \\ 32 \\ \hline 480 \end{array} \qquad \text{d)}\ \begin{array}{l} 480 : 38251 = 79^{331}/_{480}. \\ \quad\ \ \underline{3360} \\ \quad\ \ -4651 \\ \quad\ \ \ \ \underline{4320} \\ \quad\ \ \ \ -331/_{480} \end{array}$$

Antw. $87^{14}/_{15} \times {}^{29}/_{32}$ beträgt $79^{331}/_{480}$.

Erklärung. Bei a) ist die gemischte Zahl eingerichtet (in einen unnächten Bruch verwandelt) worden; bei b) sind die Zähler, bei c) die Nenner der beiden Faktoren multiplizirt worden, woraus der unächte Bruch $^{38251}/_{460}$ entstand, und bei d) wurden die Ganzen herausgezogen.

7) Vervielfache $37^5/_8$ mit $9^{13}/_{15}$!

Ansatz und Berechnung: $37^5/_8 \times 9^{13}/_{15} = {}^{301}/_8 \times {}^{148}/_{15} = {}^{44548}/_{120} = 371^{28}/_{120} = 371^7/_{30}$.

a) $37^5/_8$ — $\frac{301}{8}$ $\times$ b) $9^{13}/_{15}$ — $\frac{148}{15}$

c) 301
148
2408
1204
301
44548 (Nenner.)

d) 15
8
120 (Zähler.)

e) $120 : 44548 = 371^7/_{30}$.
360
-854
840
-148
120
$-^{28}/_{120} = {}^7/_{30}$.

$^{44548}/_{120} = 371^{28}/_{120} = 371^7/_{30}$.

Antwort:

$37^5/_8$ vervielfacht mit $9^{13}/_{15}$ gibt $371^7/_{30}$.

Oder: f) 4) $\frac{301}{8_2} \times \frac{\overset{4)\,37}{148}}{15} = \frac{301}{2} \times \frac{37}{15} = \frac{11137}{30} = 371^7/_{30}$.

Erklärung. Unter a) und b) sind die Brüche eingerichtet worden; unter c) sind die beiden Zähler, unter d) die beiden Nenner vervielfacht, was dann den unächten Bruch $^{44548}/_{120}$ gibt; das Uebrige wie vorher. Abgekürzt kann die Berechnung werden, wenn man, wie unter f), den Nenner des einen und den Zähler des andern Faktors durch 4 kürzt, wodurch man zu demselben Resultate gelangt.

8) Was beträgt $^3/_4 \times {}^5/_6 \times {}^7/_8 \times {}^5/_9$?

Ansatz und Berechnung:

a) $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{3)15}{24} = \frac{5}{8}$; b) $\frac{5}{8} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{64}$; c) $\frac{35}{64} \times \frac{5}{9} = \frac{175}{576}$.

Antwort: $^3/_4 \times {}^5/_6 \times {}^7/_8 \times {}^5/_9 = {}^{175}/_{576}$.

Erfärung. Nach der gegebenen Aufgabe ist $^3/_4$ mit $^5/_6$ zu multiplizieren, was bei a) geschehen; das Produkt dieser Brüche ($^5/_8$) ist sodann mit $^7/_8$ zu vervielfachen, was bei b) geschehen; endlich hat man dieses Produkt ($^{35}/_{64}$) noch mit $^5/_9$ zu multiplizieren, was bei c) geschehen. — Es wurden demnach alle Zähler und alle Nenner mit einander vervielfacht. Daraus ergibt sich die Regel, wenn mehr als zwei Brüche mit einander vervielfacht werden sollen:

Multiplizire alle Zähler der gegebenen Brüche mit einander und nimm das erhaltene Produkt zum Zähler;

sodann multiplizire alle Nenner mit einander und nimm dieses Produkt zum **Nenner.**

Läßt sich ein Nenner gegen den Zähler kürzen, so kann, wie vorher, das Kürzen stattfinden. Daher:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \frac{5}{9} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times 5}{4 \times 6 \times 8 \times 9} = \frac{525}{1728} \Big|^{3} = \frac{175}{576}.$$

Hier wurde erst der Zähler 3 gegen Nenner 6 gekürzt.

Oder: $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6_2} \times \frac{7}{8} \times \frac{5}{9} = \frac{175}{576}$.

Sind in einer Aufgabe Brüche mit ganzen und gemischten Zahlen zu multipliziren, so werden die Ganzen in Bruchform dargestellt, die gemischten Zahlen in unächte Brüche aufgelöst; sodann verfährt man ganz auf vorhergehende Weise. Z. B.

9) Wie viel ist $^3/_5 \times 2^1/_6 \times {}^7/_8 \times 4 \times {}^5/_7$?

Ansatz und Berechnung.

$$^3/_5 \times 2^1/_6 \times {}^7/_8 \times 4 \times {}^5/_7 = \frac{3}{5} \times \frac{13}{6} \times \frac{7}{8} \times \frac{4}{1} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 13 \times 7 \times 4 \times 5}{5 \times 6 \times 8 \times 1 \times 7} =$$

$$\frac{5460}{1680} \Big|^{60} = \frac{91}{28} \Big|^{7} = \frac{13}{4} = 3^1/_4.$$

Oder: $^2/_3 \times 2^1/_6 \times {}^7/_8 \times 4 \times {}^5/_7 = \frac{3}{5} \times \frac{13}{6_2} \times \frac{7}{8_2} \times \frac{4}{1} \times \frac{5}{7} = \frac{13}{4} = 3^1/_4$.

Bei der zweiten Berechnung wurden die Zähler gegen die Nenner gekürzt, so oft dieses anging; also der Zähler 3 gegen den Nenner 6, Zähler 7 gegen Nenner 7, Z. 4 gegen N. 8, Z. 5 gegen N. 5.

Antwort: $^3/_5 \times 2^1/_6 \times {}^7/_8 \times 4 \times {}^5/_7$ ist $3^1/_4$.

Beispiele mit benannten Zahlen.

1) In einer Gemeinde sind 13 Arme zu unterhalten, von denen jeder wochentlich $^9/_{16}$ fl. aus dem Armenfond erhält; wasfür eine Ausgabe hat die Armenkasse wochentlich zu machen?

Beurtheilung: Da jeder Arme $^9/_{16}$ fl. wochentlich erhält, so erhalten 13 Arme 13mal $^9/_{16}$ fl.; es sind also $^9/_{16}$ fl. 13mal zu nehmen, $^9/_{16}$ mit 13 zu multipliziren.

Bei der Berechnung angewandter Multiplikationsaufgaben stellen wir den Multiplikandus (die benannte Zahl) stets dem Multiplikator (der unbenannten Zahl) voran.

Ansatz und Berechnung: $^9/_{16} \times 13 = {}^9/_{16} \times {}^{13}/_1 = {}^{117}/_{16} = 7^5/_{16}$ fl.

Die Bearbeitung ist aus dem Vorhergehenden bekannt.

Antwort: Die 13 Armen erhalten wochentlich $7^5/_{16}$ fl. zusammen; also hat die Armenkasse wochentlich eine Ausgabe von $7^5/_{16}$ fl. zu machen.

2) Wenn das Schäffel Getreide $17^{11}/_{15}$ fl. gilt; wie hoch kommen dann 35 Schäffel zu stehen?

Beurtheilung: Gilt 1 Schäffel $17^{11}/_{15}$ fl., so gelten 35 Schäffel 35mal $17^{11}/_{15}$ fl., weil 35 Schäffel 35mal 1 Schäffel ist. Man hat also $17^{11}/_{15}$ fl. mit 35 zu vervielfachen.

Ansatz und Berechnung: fl. $17^{11}/_{15} \times 35 = \frac{266}{15_3} \times \frac{35^7}{1} = \frac{1862}{3} = 620^2/_3$ fl.

Antwort: 35 Schäffel gelten $620^2/_3$ fl.

3) Wenn der Zentner Kaffee 45 fl. gilt; wie hoch kommen dann $^3/_4$ Zentner Kaffee?

Beurtheilung: Kostet 1 Zentner 45 fl., so gilt $^1/_2$ Ztr. $^1/_2$mal 45 fl.; $^1/_4$ Ztr. $^1/_4$mal 45 fl.; $^3/_4$ Ztr. demnach $^3/_4$mal 45 fl. — Man hat daher 45 fl. $^3/_4$mal zu nehmen.

Ansatz und Berechnung: fl. $45 \times {}^3/_4 = {}^{45}/_1 \times {}^3/_4 = {}^{135}/_4 = 33^3/_4$ fl.

Antwort: $^3/_4$ Ztr. Kaffee gelten $33^3/_4$ fl.

4) Wenn man den Eimer Wein zu 72 fl. ankauft; was wird man zu bezahlen haben für $34^3/_5$ Eimer?

Beurtheilung: 34 Eimer gelten 34mal 72 fl.; $^3/_5$ Eimer gelten $^3/_5$mal 72 fl.; $34^3/_5$ Eimer also $34^3/_5$mal 72 fl.

Ansatz und Berechnung: fl. $72 \times 34^3/_5 = {}^{72}/_1 \times {}^{173}/_5 = {}^{12456}/_5 = 2491^1/_5$ fl. Antwort: $34^3/_5$ Eimer Wein gelten $2491^1/_5$ fl.

5) Ein Dienstbote stellt sich auf $63^4/_5$ fl. Jahreslohn; was wird man ihm zu bezahlen haben, wenn er nur $^7/_{12}$ Jahr in seinem Dienste verbleibt?

Beurtheilung: Der ganze Jahreslohn beträgt $63^4/_5$ fl.; $^7/_{12}$ Jahr sind nur $^7/_{12}$mal 1 Jahr, daher verdient der Dienstbote auch nur $^7/_{12}$ mal $63^4/_5$ fl.

Ansatz und Berechnung: fl. $63^4/_5 \times {}^7/_{12} = {}^{319}/_5 \times {}^7/_{12} = {}^{2233}/_{12} = 37^{13}/_{60}$ fl. — Antwort: Für $^7/_{12}$ Jahre hat man dem Dienstboten $37^{13}/_{60}$ fl. zu bezahlen.

6) Wenn das Schäffel Erbsen $21^5/_6$ fl. gilt; welchen Werth haben dann $47^2/_5$ Schäffel?

Beurtheilung: Gilt 1 Schäffel $21^5/_6$ fl., so gelten $47^2/_5$ Schäffel $47^2/_5$mal $21^5/_6$ fl.

Ansatz und Berechnung: fl. $21^5/_6 \times 47^2/_5 = \frac{131}{6_2} \times \frac{\overset{79}{237}}{5} = \frac{10349}{10} = 1034^9/_{10}$ fl. — Antwort: $47^2/_5$ Schäffel gelten $1034^9/_{10}$ fl.

7) Wie viel Zins tragen jährlich 3470 fl. Kapital; wenn man für 100 fl. $4^5/_8$ fl. Zins zahlen muß?

Beurtheilung: Wenn man für 100 fl. $4^5/_8$ fl. Zins zahlt, so muß man für 3470 fl. so oft mal $4^5/_8$ fl. Zins zahlen, als 3470 fl. ein Hundert Gulden sind. 3470 fl. $= {}^{3470}/_{100} = 34^{70}/_{100} = 34^7/_{10}$mal ein Hundert Gulden; folglich hat man $34^7/_{10}$mal $4^5/_8$ fl. Zins zu bezahlen.

Ansatz und Berechnung: fl. $4^5/_8 \times 34^7/_{10} = {}^{37}/_8 \times {}^{347}/_{10} = {}^{12839}/_{80} = 160^{39}/_{80}$ fl. Zins. — Antwort: für 3470 fl. Kapital muß man $160^{39}/_{80}$ fl. Zins zahlen.

8) Jemand hat eingenommen: a) 17mal $9^3/_4$ fl., b) $13^1/_3$mal $^{15}/_{16}$ fl., c) $37^3/_5$mal $26^2/_3$ fl., d) $26^5/_8$mal $64^4/_5$ fl. und e) $32^5/_{16}$mal $18^{14}/_{15}$ fl. Von dieser Einnahme gibt er aus $42^{37}/_{40}$mal $29^7/_{12}$ fl. — Was bleibt ihm noch übrig, wenn er von dem Reste noch $^2/_5$ anderweitig verwendet?

Ansatz und Berechnung:

I. Einnahme: a) $9\frac{3}{4}$ fl. $\times 17 = \frac{39}{4} \times \frac{17}{1} = \frac{663}{4} = 165\frac{3}{4}$ fl.

b) $\frac{15}{16}$ fl. $\times 13\frac{1}{3} = \frac{15}{16} \times \frac{40}{3} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$ fl.

c) $26\frac{2}{3}$ fl. $\times 37\frac{3}{5} = \frac{80}{3} \times \frac{188}{5} = \frac{3008}{3} = 1002\frac{2}{3}$ fl.

d) $64\frac{4}{5}$ fl. $\times 26\frac{5}{9} = \frac{324}{5} \times \frac{239}{9} = \frac{8604}{5} = 1720\frac{4}{5}$ fl.

e) $18\frac{14}{15}$ fl. $\times 32\frac{5}{16} = \frac{284}{15} \times \frac{517}{16} = \frac{36707}{60} = 611\frac{47}{60}$ fl.

ad a)	ad c)	ad d)	ad e)
39	188	239	517
17	16	36	71
273	1128	1434	517
39	188	717	3619
663	3008	8604	36707

f) Einnahmen:

	fl.	60
a)	$165\frac{3}{4}$	45
b)	$12\frac{1}{2}$	30
c)	$1002\frac{2}{3}$	40
d)	$1720\frac{4}{5}$	48
e)	$611\frac{47}{60}$	47
Summe:	$3513\frac{1}{2}$	$\frac{210}{60} = 3\frac{30}{60} = 3\frac{1}{2}$.

II. Ausgabe: $29\frac{7}{12}$ fl. $\times 42\frac{37}{40} = \frac{355}{12} \times \frac{1717}{40} = \frac{121907}{96} = 1269\frac{83}{96}$.

1717	12
71	8
1717	96
12019	
121907	

$96 : 121907 = 1269\frac{83}{96}$.

```
 96
 259
 192
 670
 576
 947
 864
 83/96
```

	fl.	96
Einnahme:	$3513\frac{1}{2}$	48
Ausgabe:	$1269\frac{83}{96}$	83
Rest:	$2243\frac{61}{96}$	$\frac{61}{96}$

III. Anderweitige Verwendung des Restes beträgt $^2/_5$, daher muß ihm noch $^3/_5$ des Restes ($= 2243^{61}/_{96}$) übrig bleiben, d. h. es bleibt ihm noch $^3/_5$mal $2243^{61}/_{96}$ fl. Daher:

$$2243\frac{61}{96} \times \frac{3}{5} = \frac{215389}{96_{32}} \times \frac{3}{5} = \frac{215389}{160} = 1346\frac{29}{160} \text{ fl.}$$

$160 : 215389 = 1346^{29}/_{160}$ fl.

```
 160
 ---
 -525
  480
 ----
 -450
  320
 ----
 1309
 1280
 ----
 --29/160
```

Erklärung. Bei I. sind unter a) b) c) d) und e) die Einnahmen, und unter f) ist die Summe dieser Einnahmen berechnet; bei II. ist zuerst die Ausgabe berechnet, und sodann ist diese Ausgabe von der Gesammteinnahme abgezogen worden, wodurch der Rest gefunden worden ist; endlich wurde bei III. berechnet, wie viel ihm noch geblieben ist.

Antwort: Es blieb ihm noch übrig $1346^{29}/_{160}$ fl.

9) Ein Kaufmann verkauft a) $47^2/_3$ Ellen blaues Tuch à $3^4/_5$ fl.; b) $55^3/_5$ Ellen grünes Tuch à $2^7/_8$ fl.; c) $39^3/_8$ Ellen schwarzes Tuch à $4^1/_6$ fl.; d) $61^3/_4$ Ellen graues Tuch à $1^2/_3$ fl. und $42^2/_3$ Ellen Seidenzeuge à $2^3/_4$ fl. Es fragt sich: 1) Wie viel Ellen Tuch hat er im Ganzen verkauft? 2) Was von jeder Sorte erlöſ't und wie viel im Ganzen? 3) Wenn er von der Einnahme $297^{13}/_{16}$ fl. verausgabt, was bleibt ihm noch übrig?

Ansatz und Berechnung:

	Ell.	120
I.	a) $47^2/_3$	$40 \times 2 = 80$
	b) $55^3/_5$	$24 \times 3 = 72$
	c) $39^3/_8$	$15 \times 3 = 45$
	d) $61^3/_4$	$30 \times 3 = 90$
	e) $42^2/_3$	$40 \times 2 = 80$
Summe	$247^7/_{120}$	$^{367}/_{120} = 3^7/_{120}$

```
    15,  20,  16,  12,  3
2) ----------------------
    15   10    8    6
2) ----------------------
    15    5    4    3
```

$2 \times 2 \times 15 \times 4 = 240$ allgem. Nenner.

	fl.	fl.	240
II. a)	$3\frac{4}{5} \times 47\frac{2}{3} = \frac{19}{15} \times \frac{143}{3} = \frac{2717}{15} =$	$181^2/_{15}$	$16 \times 2 = 32$
b)	$2\frac{7}{8} \times 55\frac{3}{5} = \frac{23}{8_4} \times \frac{278^{139}}{5} = \frac{3197}{20} =$	$159^{17}/_{20}$	$12 \times 17 = 204$
c)	$4\frac{1}{6} \times 39\frac{3}{8} = \frac{25}{6_2} \times \frac{315^{105}}{8} = \frac{2625}{16} =$	$164^1/_{16}$	$15 \times 1 = 15$
d)	$1\frac{2}{3} \times 61\frac{3}{4} = \frac{5}{3} \times \frac{247}{4} = \frac{1235}{12} =$	$102^{11}/_{12}$	$20 \times 11 = 220$
e)	$2\frac{3}{4} \times 42\frac{2}{3} = \frac{11}{4} \times \frac{128^{32}}{3} = \frac{352}{3} =$	$117^1/_3$	$80 \times 1 = 80$
	Summe:	$725^{71}/_{240}$	$^{551}/_{240} = 2^{71}/_{240}$

		240
III. Einnahme:	$725\frac{71}{240}$	71
Ausgabe:	$297\frac{13}{16}$	195
Rest:	$427\frac{29}{60}$	$\frac{116}{120} = \frac{29}{60}$

Antwort: I. Im Ganzen hatte der Kaufmann $247\frac{7}{120}$ Ellen Tuch verkauft. II. Hiefür hatte er $725\frac{71}{240}$ fl. eingenommen. III. Es verblieb ihm noch $427\frac{29}{60}$ fl. —

Resolutions-Aufgaben.

1) $\frac{7}{8}$ fl. sind wie viele Kreuzer?

Beurtheilung: 1 fl. gibt 60 kr.; $\frac{1}{8}$ fl. gibt $\frac{1}{8}$mal 60 kr.; $\frac{7}{8}$ fl. daher $\frac{7}{8}$mal 60 kr.

Ansatz und Berechnung: $\overset{\text{kr.}}{60} \times \frac{7}{8} = \frac{\overset{15}{\cancel{60}}}{1} \times \frac{7}{\underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{105}{2} = 52\frac{1}{2}$ kr.

Oder: $\frac{7}{\underset{2}{\cancel{8}}} \times \frac{\overset{15}{\cancel{60}}}{1} = \frac{105}{2} = 52\frac{1}{2}$ kr.

Antwort: $\frac{7}{8}$ fl. sind $52\frac{1}{2}$ kr.

2) $\frac{11}{12}$ preuß. Thlr. sind wie viel Silbergroschen?

Beurtheilung: 1 preuß. Thlr. hat 30 Sgr.; $\frac{11}{12}$ preuß. Thaler daher $\frac{11}{12}$mal 30 Sgr.

Ansatz und Berechnung: $\overset{\text{Sgr.}}{30} \times \frac{11}{12} = \frac{\overset{5}{\cancel{30}}}{1} \times \frac{11}{\underset{2}{\cancel{12}}} = \frac{55}{2} = 27\frac{1}{2}$ Sgr. Oder: $\frac{11}{\underset{2}{\cancel{12}}} \times \frac{\overset{5}{\cancel{30}}}{1} = \frac{55}{2} = 27\frac{1}{2}$ Sgr. Antw. $\frac{11}{12}$ preuß. Thlr. sind $27\frac{1}{2}$ Sgr.

3) $\frac{7}{12}$ ℔ sind wie viel Loth?

Beurtheilung: 1 ℔ hat 32 Loth; $\frac{7}{12}$ ℔ haben $\frac{7}{12}$mal 32 Loth.

Ansatz und Berechnung: $\overset{\text{Lth.}}{32} \times \frac{7}{12} = \frac{\overset{8}{\cancel{32}}}{1} \times \frac{7}{\underset{3}{\cancel{12}}} = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$ Loth. Oder: $\frac{7}{\underset{3}{\cancel{12}}} \times \frac{\overset{8}{\cancel{32}}}{1} = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$ Loth. Antw. $\frac{7}{12}$ ℔ sind $18\frac{2}{3}$ Loth.

4) $\frac{15}{16}$ Schäffel geben wie viel Dreißiger?

Beurtheilung: 1 Schäffel = 6 Metzen; $\frac{1}{16}$ Schäffel also $\frac{1}{16}$mal 6 Mtz.; $\frac{15}{16}$ Schäffel $\frac{15}{16}$mal 6 Mtz. = $\frac{90}{16}$ Mtz. 1 Mtz. = 32 Dreißiger; $\frac{1}{16}$ Mtz. = $\frac{1}{16}$mal 32 Dreißiger; $\frac{90}{16}$ Mtz. = $\frac{90}{16}$mal 32 Dreißiger.

Ansatz und Berechnung: $\frac{15}{16}$ Schfl. $= \frac{15}{\cancel{16}} \times \frac{6}{1} \times \frac{\overset{2}{\cancel{32}}}{1} = 180$ Dreiß.

Antwort. $\frac{15}{16}$ Schfl. geben 180 Dreißiger.

5) 35 ℔ $17\frac{3}{5}$ Loth geben wie viel Quint?

Beurtheilung: 1 ℔ = 32 Loth.; 35 ℔ $17^3/_5$ Lth. = 35 × 32 + $17^3/_5$ Loth.; 1 Lth. = 4 Q.; 35 ℔ = 35 × 32 × 4 Q.; $17^3/_5$ Lth. = $17^3/_5$ × 4 Qt.

Ansatz und Berechnung: 35 ℔ $17^3/_5$ Lth. — $1137^3/_5$ Lth. $= \frac{5688}{5} \times \frac{4}{1} = \frac{22752}{5} = 4550^2/_5$ Q.

$$\begin{array}{r} 35 \\ 32 \\ \hline 70 \\ 105 \\ \hline 1120 \\ +17^3/_5 \\ \hline 1137^3/_5 \text{ Lth.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1137^3/_5 \\ \hline 5688 \\ \hline 5 \end{array}$$

Oder: 35 ℔ + $17^3/_5$ Lth. = 4480 Qt. + $70^2/_5$ Qt. = $4550^2/_5$ Qt.

$$\begin{array}{r} 32 \\ \hline 70 \\ 105 \\ \hline 1120 \text{ Lth.} \\ 4 \\ \hline 4480 \text{ Quint.} \end{array} \qquad \frac{88}{5} \times \frac{4}{1} = \frac{352}{5} \times 70^2/_5 \text{ Qt.}$$

Antwort. 35 ℔ $17^3/_5$ Loth sind $4550^2/_5$ Quint.

Folgerung. Aus diesen Beispielen der Resolution übergeordneter Größen in untergeordnete ist ersichtlich, daß hier stets eine ganze Zahl (die Reduktions- oder Währungszahl) mit einem Bruche zu vervielfachen ist, in welchem Falle man die ganze Zahl in Bruchform darstellt, und sodann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner vervielfacht; daher gilt für die Resolutionsrechnung (Auflösen übergeordneter Größen in untergeordnete) folgende Regel:

Soll eine übergeordnete Größe in eine untergeordnete aufgelös't werden, so stelle man die Reduktions- oder Währungs-Zahl in Bruchform dar, indem man dieser Zahl 1 zum Nenner gibt, und multiplizire dann den Zähler dieses Bruches mit dem Zähler des zur Auflösung gegebenen Bruches, und eben so die beiden Nenner. Oder noch kürzer: Man multiplizire den Zähler des zur Auflösung gegebenen Bruches mit den entsprechenden Reduktions- oder Währungs-Zahlen und gebe dem Produkte den Nenner des Bruches zum Nenner. — Sind ungleich benannte Größen gegeben, so werden diese erst gleichnamig gemacht. Z. B.

1) $^5/_8$ Fuß sollen in Zoll aufgelös't werden!

Berechnung: 1′ = 12″. $\frac{5' \times 12}{8} = \frac{60}{8} = 7\frac{4}{8} = 7\frac{1}{2}$ Zoll.

Oder: $\frac{5 \times \overset{3}{12}}{\underset{2}{8}} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ Zoll.

2) $^7/_9$ Zentner sind wie viel Loth?
Berechnung: 1 Ztr. = 100 ℔; 1 ℔ = 32 Lth.
$\frac{7 \times 100 \times 32}{9} = \frac{22400}{9} = 2488^8/_9$ Loth.

3) 1 Schäffel $4^2/_5$ Metzen geben wie viel Dreißiger?
Berechnung: 1 Schfl. = 6 Metzen, 1 Metzen = 32 Dreißiger.

1 Schfl. $4^2/_5$ Mtz. $= 10^2/_5$ Metz. $= \frac{52 \times 32}{5} = \frac{1664}{5} = 332^4/_5$ Drßgr.

$$\begin{array}{l} 6 \\ \underline{6} \\ 6 \\ \underline{+4^2/_5} \\ 10^2/_5 \text{ Mtz.} \\ \underline{52} \\ 5 \end{array}$$

Oder: 1 Schfl. + $4^2/_5$ Mtz. $= 192 + 140^4/_5 = 332^4/_5$ Dreißgr.

$$\begin{array}{l} 6 \\ \underline{6} \\ 6 \\ \underline{32} \\ 192 \text{ Dreißiger.} \end{array} \qquad \frac{22 \times 32}{5} = \frac{704}{5} = 140^4/_5 \text{ Dreißiger.}$$

Antwort: 1 Schäffel $4^2/_5$ Metzen geben $332^4/_5$ Dreißiger.

Reduktions-Aufgaben.

1) 48 kr. geben wasfür einen Guldenbruch?

Beurtheilung: 60 kr. geben 1 fl.; 1 kr. gibt daher $^1/_{60}$ fl.; 48 kr. geben also 48mal $^1/_{60}$ fl.

Ansatz und Berechnung: $\overset{\text{fl.}}{\frac{1}{60}} \times 48 = \frac{1}{\underset{5}{60}} \times \frac{\overset{4}{48}}{1} = \frac{4}{5}$ fl.

Oder kürzer: $\frac{\overset{4}{48}}{1} \times \frac{1}{\underset{5}{60}} = \frac{4}{5}$ fl. Antw. 48 kr. geben $^4/_5$ fl.

2) Wie viel Zentner geben 65 ℔?

Beurtheilung: 100 ℔ geben 1 Ztr.; 1 ℔ gibt daher $^1/_{100}$ Zentner; 65 ℔ also 65mal $^1/_{100}$ Ztr.

Ansatz und Berechnung: $\overset{\text{Ztr.}}{\frac{1}{100}} \times 65 = \frac{1}{\underset{20}{100}} \times \frac{\overset{13}{65}}{1} = \frac{13}{20}$ Zentner.

Oder kürzer: $\frac{\overset{13}{65}}{1} \times \frac{1}{\underset{20}{100}} = \frac{13}{20}$ Ztr. Antw. 65 ℔ geben $^{13}/_{20}$ Zentner.

3) 372 Quadratfuß (zwölftheilig) geben wie viel □ Ruthen?

Beurtheilung: 144 □ Fuß geben 1 □ Ruthe; 1 □ Fuß also $^1/_{144}$ □ Ruthe; 372 □ Fuß daher 372mal $^1/_{144}$ □ Ruthe.

Ansatz u. Berechnung: $\frac{1}{144}\square^0 \times 372 = \frac{1}{\underset{12}{144}} \times \frac{\overset{31}{372}}{1} = \frac{31}{12} = 2^7/_{12}$ □R.

Oder: $\frac{\overset{31}{372}}{1} \times \frac{1}{\underset{12}{144}} = \frac{31}{12} = 2^7/_{12}$ □ Ruthen.

Antwort: 372 □ Fuß geben $2^7/_{12}$ □ Ruthen.

4) 28 Dreißiger sind wasfür ein Bruch in Schäffel ausgedrückt?

Beurtheilung: 32 Dreißiger geben 1 Metzen; 1 Drßgr. also $^1/_{32}$ Mtz.; 6 Metzen = 1 Schfl., 1 Metzen also $^1/_6$ Schfl., $^1/_{32}$ Mtz. daher $^1/_{32}$mal $^1/_6$ Schfl. — 28 Drßgr. sind daher 28mal $^1/_{32} = {}^{28}/_{32}$ Mtz. und $^{28}/_{32}$ Mtz. sind $^{28}/_{32}$mal $^1/_6$ Schfl. — Oder: 32 Drßgr. = 1 Mtz.

und 6 × 32 Drßgr. = 192 Drßgr. = 1 Schfl.; 1 Drßgr. daher $^1/_{192}$ Schfl.; 28 Drßgr. demnach 28mal $^1/_{192}$ Schfl.

Ansatz u. Berechnung: 28 Drß. = $\frac{\overset{7}{28}}{1} \times \frac{1}{\underset{8}{32}} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{48}$ Schfl.

Oder: 28 Drßgr. = $\frac{\overset{7}{28}}{1} \times \frac{1}{\underset{48}{192}} = \frac{7}{48}$ Schfl.

Antwort. 28 Dreißiger geben $^7/_{48}$ Schäffel?

5) 17 ℔ 13 Loth 2 Quint wasfür ein Zentner-Bruch?

Beurtheilung: Hier haben wir zuerst zu untersuchen, wie viele Quint 17 ℔ 13 Lth. 2 Q. geben; 17 ℔ = 17mal 32 Loth = 544 Lth.; 544 Lth. + 13 Lth. = 557 Lth.; 557 Lth. = 557mal 4 Q. = 2228 Q.; 2228 + 2 Q. = 2230 Q.; 4 Q. = 1 Lth., 1 Q. daher $^1/_4$ Lth.; 32 Lth. = 1 ℔, 1 Lth. = $^1/_{32}$ ℔, $^1/_4$ Lth. = $^1/_4 \times {}^1/_{32}$ ℔; 100 ℔ = 1 Ztr., 1 ℔ = $^1/_{100}$ Ztr.; $^1/_4 \times {}^1/_{32}$ ℔ = $^1/_4 \times {}^1/_{32} \times {}^1/_{100}$ Ztr.; daher 2230 Q. = 2230 × $^1/_4 \times {}^1/_{32} \times {}^1/_{100}$ Zentner.

Ansatz und Berechnung:

17 ℔ 13 Lth. 2 Q. = 2230 Q. = $^{2230}/_1 \times {}^1/_4 \times {}^1/_{32} \times {}^1/_{100} = \frac{2230}{12800} = \frac{223}{1280}$ Ztr.

17
32
47
51
557 Lth.
4
2230 Q.

Antwort: 17 ℔ 13 Lth. 2 Q. machen $^{223}/_{1280}$ Ztr.

6) 5 Metzen, 2 Vierling, $6^2/_3$ Dreißiger machen wie viel Schäffel?

Beurtheilung: Hier sind wieder vorerst die 5 Mtz., 2 Vrlg. und $6^2/_3$ Drßgr. aufzulösen, in Drittel-Dreißiger zu verwandeln.

5 Mtz. 2 Vrlg. $6^2/_3$ Drßgr.
4
20
+2
22 Vrlg.
8
176
$+6^2/_3$
$182^2/_3$
548/3 Drßg.

8 Drßgr. = 1 Vrlg., 1 Drßgr. = $^1/_8$ Vrlg., $^1/_3$ Drßgr. = $^1/_3 \times {}^1/_8$ Vrlg., 4 Vrlg. = 1 Mtz., 1 Vrlg. = $^1/_4$ Mtz.; $^1/_3 \times {}^1/_8$ Vrlg. = $^1/_3 \times {}^1/_8 \times {}^1/_4$ Mtz.; 6 Mtz. = 1 Schfl., 1 Mtz. = $^1/_6$ Schfl.; — $^1/_3 \times {}^1/_8 \times {}^1/_4$ Mtz. = $^1/_3 \times {}^1/_8 \times {}^1/_4 \times {}^1/_6$ Schfl. — $^{548}/_3$ Drßgr. daher = $^{548}/_3 \times {}^1/_8 \times {}^1/_4 \times {}^1/_6$ Schfl.

Ansatz und Berechnung: 5 Mtz. 2 Vrl. $6^2/_3$ Dreiß. = $^{548}/_3$ Drßgr.

$\frac{548}{3}$ Drßgr. = $\frac{548^{137}}{3} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{137}{144}$ Schfl.

3 × 8 × 6 = 144 (N.).

Antwort: 5 Mtz. 2 Vrlg. $6\frac{2}{3}$ Drßgr. machen $\frac{137}{141}$ Schfl.

Folgerung. Aus diesen Beispielen der Reduktion untergeordneter Größen in übergeordnete sehen wir, daß wir zur Multiplikation stets solche Brüche erhalten, die 1 zum Zähler und die Reduktions- oder Währungs-Zahlen der entsprechenden übergeordneten Größen zum Nenner haben; daher können Reduktionsberechnungen auf kürzerm Wege nach folgender Regel gelös't werden.

Sind untergeordnete Größen in übergeordnete zurückzuführen, so stelle man die zur Reduktion gegebene Größe in Bruchform dar (wenn diese nicht schon ein Bruch ist; ist sie eine gemischte Zahl, so verwandelt man sie in einen unächten Bruch; ungleichbenannte Größen macht man gleichnamig,) und multiplizire den Nenner dieses Bruches mit den entspechenden Reduktions- oder Währungs-Zahlen.

Z. B. 1) 96 Quadratzoll sind wie viel Q.-Fuß?

Berechnung: $96\,\square' = \frac{69}{1 \times 144} = \frac{96}{144} = \frac{2}{3}\,\square'$

2) $43\frac{3}{4}$ Drßgr. wie viel Schäffel?

Berechnung: $43\frac{3}{4}$ Drßgr. $= \frac{175}{4 \times 32 \times 6} = \frac{175}{768}$ Schffl.

3) 52 ℔ 18 Lth. 2 Quint wie viel Ztr.?

Berechnung:

52 ℔ 18 Lth. 2 Q. $= \frac{6730}{1 \times 4 \times 32 \times 100} = \frac{673}{1280}$ Ztr.

32
104
156
1664
+18
1682 Lth.
4
6728
+2
6730 Q.

Antwort: 52 ℔ 18 Lth. 2 Q. sind $\frac{673}{1280}$ Ztr.

Aufgaben.

1. Multiplizire jede der folgenden Bruchzahlen: a) $\frac{37}{48}$, b) $\frac{43}{57}$, c) $\frac{56}{87}$, d) $\frac{75}{98}$, e) $\frac{83}{120}$, f) $\frac{99}{158}$, g) $\frac{138}{209}$, h) $\frac{558}{793}$, i) $\frac{1072}{2871}$, k) $\frac{3590}{8081}$ mit 1) 7, 2) 9, 3) 53, 4) 97, 5) 178, 6) $13\frac{1}{3}$, 7) $28\frac{4}{5}$, 8) $91\frac{5}{12}$, 9) $57\frac{14}{15}$ u. 10) $239\frac{53}{124}$!

2. Vervielfache: a) $38\frac{37}{80}$, b) 167, c) $9\frac{107}{468}$, d) $50\frac{304}{475}$, e) $\frac{369}{473}$, f) $715\frac{36}{75}$, g) $\frac{1081}{7450}$, h) $89\frac{45}{104}$, i) 245, k) $377\frac{431}{592}$ — 1) mit 54, 2) 129, 3) $\frac{65}{83}$, 4) $1\frac{5}{8}$, 5) $47\frac{8}{9}$, 6) $83\frac{17}{32}$, 7) $129\frac{5}{6}$, 8) $263\frac{9}{25}$, 9) $\frac{374}{591}$, 10) $391\frac{83}{147}$.

3. Wie viel ist a) $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{8}$? b) $\frac{7}{12} \times \frac{4}{5} \times \frac{13}{15} \times \frac{16}{61}$? c) $\frac{25}{32} \times \frac{8}{9} \times \frac{17}{48} \times \frac{26}{55}$? d) $\frac{37}{40} \times \frac{13}{24} \times \frac{51}{74} \times \frac{4}{7}$? e) $\frac{13}{36} \times \frac{45}{52} \times \frac{72}{85} \times \frac{26}{29}$?

4. Wasfür ein Produkt entsteht, wenn man multiplizirt: a) $\frac{3}{4} \times 1\frac{3}{4} \times 5 \times 3\frac{4}{5}$? b) $5\frac{1}{2} \times \frac{5}{9} \times 7 \times 4\frac{2}{3}$? c) $5\frac{3}{8} \times 2\frac{1}{2} \times 9\frac{5}{7} \times \frac{11}{12}$? d) $2\frac{5}{9} \times 3 \times \frac{17}{24} \times 5\frac{3}{6} \times 4\frac{1}{2}$?

5. Multiplizire a) $12 \times 4\frac{4}{5}$ mit $9 \times 7\frac{7}{8}$; b) $3\frac{3}{4} \times 7$ mit $8\frac{5}{6} \times 5$; c) $13\frac{1}{2} \times 5\frac{2}{3}$ mit $6 \times 7\frac{4}{5}$; d) $8\frac{3}{4} \times 9$ mit $7\frac{1}{7} \times 4\frac{3}{8}$; e) $5\frac{3}{5} \times 2\frac{4}{7}$ mit $6\frac{5}{8} \times 9\frac{1}{3}$; f) $13\frac{7}{10} \times 7\frac{11}{12}$ mit $16\frac{13}{15} \times 2\frac{3}{4}$.

6. Wie viel ist: a) $(2 \times 5\frac{1}{2}) + (3\frac{2}{5} \times 7)$? b) $(7\frac{3}{5} + \frac{5}{8}) \times \frac{15}{16}$? c) $(5\frac{4}{7} \times 9\frac{3}{4}) - (2\frac{1}{3} \times 5\frac{5}{6})$? d) $(5\frac{3}{4} + 9\frac{4}{5}) \times (3\frac{7}{9} \times 5\frac{5}{6})$? e) $23\frac{1}{6} - 9\frac{4}{5}) \times (15\frac{5}{8} + 3\frac{2}{3})$? f) $(25\frac{7}{9} \times 6\frac{4}{5})$ davon abgezogen $\frac{7}{8} \times 13\frac{1}{5}$, den Rest $7\frac{1}{2}$mal genommen, ist um wie viel mehr als $965\frac{5}{6}$?

7. Nimm $13\frac{5}{8}$ Ellen a) 5mal, b) 17mal, c) 23mal, d) $\frac{4}{5}$mal, e) $\frac{13}{21}$mal, f) $4\frac{9}{10}$mal, g) $27\frac{11}{18}$mal!

8. Jemand hat an ein Regiment monatlich $59\frac{17}{32}$ Schffl. Haber zu liefern; wie viel lieferte er a) in 12 Monaten; b) wie viel in 27 Monaten?

9. 1 Elle Tuch gilt $4\frac{13}{15}$ fl.; was gelten a) 9 Ell.? b) 35 Ell.? c) $\frac{7}{8}$ Ell.? d) $7\frac{3}{5}$ Ell.? e) $65\frac{7}{16}$ Ell.?

10. Wenn das Schäffel Getreide $23\frac{5}{7}$ fl. gilt; wie hoch kommen a) 53 Schäffel? b) 193 Schffl.? c) $73\frac{4}{5}$ Schffl.? d) $89\frac{4}{9}$ Schffl.? e) $126\frac{11}{12}$ Schffl.? f) $246\frac{17}{20}$ Schfl.?

11. Jemand hat eingenommen: a) $\frac{3}{4} \times 14\frac{5}{8}$ fl., b) $3\frac{4}{5} \times 26\frac{5}{8}$ fl., c) $17 \times 21\frac{9}{16}$ fl., d) $3\frac{4}{7} \times 50\frac{5}{9}$ fl. und e) $11\frac{1}{2} \times 36\frac{1}{15}$ fl. — Von dieser Einnahme verwendete er: a) $\frac{2}{3} \times 7\frac{5}{8}$ fl., b) $5\frac{1}{6} \times 9\frac{5}{8}$ fl., c) $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times 5 \times 2\frac{5}{6}$ fl. Wie groß war seine Einnahme? — wie groß die Ausgabe? — und was blieb ihm noch? Wenn er ferner $\frac{5}{8}$ des Restes zur Ausbesserung seines Wohnhauses bestimmte; wie viel Geld bleibt ihm endlich noch?

12. Drei Personen kaufen Waaren für $1577\frac{1}{2}$ fl. A nahm davon $\frac{5}{8}$, B $\frac{1}{4}$ und C $\frac{1}{8}$; wie viel muß jede zahlen?

13. Drei Schafheerdenbesitzer pachten in einer Gemeinde die Schafweide um $683\frac{4}{5}$ fl. A benutzt davon $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{4}$ und C $\frac{5}{12}$; wie viel muß jeder an dem Pachte bezahlen?

14. Ein Bauer verkauft $12\frac{2}{3}$ Schffl. Kern à $14\frac{2}{5}$ fl.; $9\frac{3}{4}$ Schfl. Roggen à $11\frac{2}{3}$ fl., $17\frac{5}{6}$ Schfl. Gerste à $9\frac{3}{8}$ fl., $24\frac{4}{5}$ Schfl. Haber à $4\frac{1}{6}$ fl. und $3\frac{5}{12}$ Schfl. Leinsamen à $16\frac{1}{2}$ fl. Es fragt sich: a) Wie viel Schfl. Frucht hat er im Ganzen verkauft? b) Was hat er aus jeder Sorte erlös't, und wie viel im Ganzen? c) Wenn er von der ganzen Einnahme $200\frac{31}{40}$ fl. ausgibt, wie viel bleibt ihm noch übrig? und d) wenn er von dem Reste noch $\frac{5}{44}$ auf Anschaffung von Ackergeräthen verwendet, welche Baarschaft bleibt ihm noch in der Hand?

15. Ein Kaufmann erhielt 4 Ballen Waaren, die zusammen $4163\frac{1}{2}$ ℔ wogen. Davon enthielt der Ballen A $853\frac{1}{2}$ ℔ à $\frac{4}{5}$ fl.; B $987\frac{3}{5}$ ℔ à $\frac{7}{8}$ fl.; C $1695\frac{1}{3}$ ℔ à $1\frac{1}{6}$ fl. Vom 4. Ballen D kostete das ℔ $1\frac{3}{8}$ fl. Er verkaufte von A u. B das ℔ zu $1\frac{1}{5}$ fl., von C u. D das ℔ zu $1\frac{3}{4}$ fl. Es fragt sich: a) Wie viel Pfund enthielt der Ballen D? b) Wie viel betrug der Gewinn im Ganzen? c) Wie viel gewann er an A und B, wie viel an C und D?

16. Ein Landkrämer erhält ein Faß Kaffee, das $2\frac{3}{8}$ Zentner wiegt. Das Faß allein wiegt $48\frac{3}{4}$ ℔. Das Pfund Kaffee ist zu $27\frac{1}{2}$ kr. berechnet; an Fracht hat er 5 fl. $52\frac{1}{2}$ kr. zu bezahlen. Wenn der Krämer nun das ℔ zu $35\frac{3}{4}$ kr. verkauft; wie viel beträgt nun der Gewinn überhaupt?

17. Löse auf: a) $\frac{19}{24}$ fl. in Kreuzer; b) $\frac{32}{45}$ Ztr. in Pfund; c) $\frac{43}{48}$ Schfl. in Metzen? d) $\frac{13}{18}$ Fuß in Zoll; e) $\frac{29}{35}$ ℔ in Loth; f) $\frac{37}{64}$ fl. in Pfenninge; g) $\frac{23}{25}$ ℔ in Quint; h) $\frac{41}{56}$ Ztr. in Qnt.; i) $\frac{11}{15}$ Schfl. in Dreißiger; k) 5 Rieß, $17\frac{3}{4}$ Buch Papier in Bogen!

18. Reduzire: a) 51 kr. auf fl.; b) 72 ℔ auf Ztr.; c) 39 Mtz. auf Schfl.; d) 98 □ Fuß auf □ Rth.; e) 27 Dreißg. auf Schfl.; f) 3756 Qnt. auf Ztr.; g) $37\frac{1}{2}$ Maß auf Eimer; h) $46\frac{2}{3}$ Pfd. auf Ztr.; i) 27 kr. 3 pf. $1\frac{1}{2}$ hl. auf fl.; k) 6 Mtz. 3 Vierlg. $6\frac{3}{5}$ Dreißg. auf Schäffel!

19. Jemand hat $966^{2}/_{3}$ fl. entlehnt und muß für jeden Gulden $2^{3}/_{4}$ kr. Zinsen geben. a) Wie viel beträgt der sämmtliche Zins? b) Wie viel Zins gab er von 100 fl. (Prozent)?

20. Herr W. Weiß übergab seinem eilfjährigen Sohne folgende Rechnung zu vollenden: Dilingen, den 31. im Dezember 1855.

Rechnung
für Herrn Lehrer E. Dufey in Lauingen
von Wilhelm Weiß.

1855			fl.	kr.	hl.
Februar	3	Ein Stück Leinwand von 72 Ellen à $27^{1}/_{2}$ kr. .			
März	12	9 ℔ Kaffee à $33^{3}/_{4}$ kr.			
"	—	$14^{3}/_{8}$ ℔ Zucker à $26^{1}/_{2}$ kr.			
Mai	1	$17^{1}/_{2}$ ℔ Reiß à $13^{1}/_{4}$ kr.			
"	28	$7^{3}/_{4}$ ℔ Zwetschgen à $8^{1}/_{2}$ kr.			
Juli	7	$5^{2}/_{3}$ Ellen Tuch à $4^{5}/_{8}$ fl.			
August	20	$13^{1}/_{2}$ Ellen Kattun à $34^{1}/_{2}$ kr.			
September	15	$9^{3}/_{4}$ Ellen Seidenband à $46^{1}/_{2}$ kr.			
Oktober	13	$3^{3}/_{4}$ Ellen Tuch à $5^{1}/_{6}$ fl.			
"	—	$2^{1}/_{2}$ Quint Seide à $14^{1}/_{4}$ kr.			
"	—	5 Ellen Unterfutter à $7^{1}/_{2}$ kr.			
November	5	$13^{1}/_{2}$ ℔ Lichte à $25^{1}/_{4}$ kr.			
"	16	$6^{3}/_{4}$ ℔ Seife à $17^{1}/_{2}$ kr.			
"	—	$2^{1}/_{2}$ ℔ Speiseöl à $37^{1}/_{2}$ kr.			
Dezember	24	12 ℔ Kaffee à $32^{1}/_{2}$ kr.			
"	—	$16^{3}/_{4}$ ℔ Zucker à $23^{3}/_{5}$ kr.			
		Wie viel beträgt die Summe?			

Und wenn man hierauf $49^{15}/_{16}$ fl. bezahlt; was bleibt man noch schuldig?

IV. Dividiren.

Vorbemerkungen.

Dividiren heißt bekanntlich, eine Zahl in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilen, deren Anzahl durch den Divisor bestimmt wird, und dadurch die Größe eines, somit aber auch die Größe jeden Theiles bestimmen. Z. B. 15 durch 3 dividiren heißt also, es soll 15 in 3 gleiche Theile getheilt und angegeben werden, wie groß ein, und somit jeder Theil ist. Diese Erklärung des Dividirens ist auch auf die Division eines Bruches ganz anwendbar, insofern der Divisor eine ganze Zahl ist. $^{15}/_{16}$ durch 3 dividiren heißt ebenfalls, $^{15}/_{16}$ in 3 gleiche Theile theilen und die Größe eines, hier des 3ten Theiles, angeben.

Anders verhält es sich aber, wenn der Divisor eine Bruchzahl ist. Heißt es: 15 soll durch $^{3}/_{4}$ dividirt werden, so läßt sich die obige Erklärung des Dividirens wol nicht unverändert auch auf dieses Beispiel anwenden; denn, in wie viele gleiche Theile soll 15 getheilt werden? — — Diese Frage läßt sich nicht beantworten. Wir müssen der Sache daher eine andere Wendung geben. — Dividiren heißt auch: untersuchen, der wie vielste Theil eine Zahl von einer andern Zahl ist. Diese Auffassung läßt sich schon auf die Division durch einen Bruch übertragen; denn, wie wir fragen können: der wie vielste Theil von 15 ist 3? so können wir auch fragen: der wie vielste Theil von 15 ist $^{3}/_{4}$? — Ferner:

Dividiren heißt: untersuchen, wie oft eine Zahl in einer andern Zahl enthalten sei. Diese Auffassungsweise läßt sich ebenfalls auf die Division durch Brüche anwenden, ja sie ist wol besonders in Primärschulen für Schüler von 9—10 Jahren die klarere und die am leichtesten erfaßbare. So wie wir nun untersuchen können, wie oft 3 in 15 enthalten ist; so läßt sich auch untersuchen, wie oft $^3/_4$ in 15 enthalten ist.

Das Dividiren durch einen Bruch kann also in einer zweifachen Anschauungsweise aufgefaßt werden, nämlich, durch einen Bruch dividiren heißt: 1. untersuchen, der wie vielste Theil ein Bruch von einer andern Zahl sei; oder

2. untersuchen, wie oft ein Bruch in einer andern gegebenen Zahl enthalten sei.

Diese beiden Ansichten führen zu ein und demselben Ergebnisse. Denn weiß man, der wie vielste Theil eine Zahl von einer andern Zahl ist, so weiß man auch, wie oft jene Zahl in dieser enthalten ist. Umgekehrt: weiß man, wie oft eine Zahl in einer andern Zahl enthalten ist, so weiß man auch, der wie vielste Theil jene von dieser ist. Dieses gilt von Brüchen so gut, wie von ganzen Zahlen. 3 ist der 5. Theil von 15, folglich ist 3 in 15 auch 5mal enthalten; und umgekehrt: da 3 in 15 5mal enthalten ist, so ist 3 der 5. Theil von 15. Ebenso: weiß ich z. B. daß der Bruch $^1/_2$ der 8. Theil von 4 ist, so weiß ich auch, daß der Bruch $^1/_2$ in 4 8mal enthalten ist; und weiß ich, daß $^3/_4$ in 15 20mal enthalten ist, so weiß ich auch, daß $^3/_4$ der 20. Theil von 15 ist. So auch umgekehrt. Dieses läßt sich vielleicht noch auf folgende Weise zu klarer Einsicht bringen: 1 ist der 4. Theil von 4; $^1/_2$ ist nur halb so groß als 1. Eine kleinere Zahl ist aber offenbar ein kleinerer Theil von einer ein und derselben andern Zahl; daher wird auch $^1/_2$ ein kleinerer Theil von 4 sein, als der wie vielste Theil 1 von 4 ist. Da nun 1 der 4. Theil von 4 ist, so ist $^1/_2$, das nur halb so groß als 1 ist, nur der halbe oder 2. Theil vom 4. Theil von 4; der halbe Theil vom 4. Theil ist aber der 8. Theil. Also: $^1/_2$ ist der 8. Theil von 4. — 1 ist in 4 4mal enthalten; $^1/_2$ ist die Hälfte oder der halbe Theil von 1. Eine kleinere Zahl ist in einer andern gewissen Zahl öfter enthalten, als eine größere, und zwar so oftmal so oft, als wie vielmal die kleinere kleiner ist. $^1/_2$ ist zweimal so klein als 1, daher wird $^1/_2$ nun 2mal so oft in 4 enthalten sein, als 1 in 4. Da nun 1 in 4 4mal enthalten ist, so ist $^1/_2$ in 4 $2 \times 4 = 8$mal enthalten.

Ebenso: 3 ist der 5. Theil von 15; $^3/_4$ ist 4mal so klein, nur der 4. Theil von 3, daher ist $^3/_4$ auch ein 4mal so kleiner Theil von 15 als 3 oder nur der 4. Theil des 5. Theils, d. i. der 20. Theil. — 3 ist in 15 5mal enthalten; $^3/_4$ ist 4mal so klein als 3, daher muß $^3/_4$ auch 4mal so oft in 15 enthalten sein als 3. Da nun 3 in 15 5mal enthalten ist, so ist $^3/_4$ in 15 ($4 \times 5 =$) 20mal enthalten.

Die Division mit Brüchen läßt sich auch noch nach einer andern Ansicht auffassen. Aus dem früheren Unterrichte wissen wir, daß der Dividend als Produkt zweier Faktoren, wovon der Divisor der Eine Faktor ist, angesehen werden kann. 15 durch 3 dividiren heißt demnach auch:

untersuchen, welches die Zahl ist, die mit 3 multiplizirt — 15 gibt. Eben so heißt 15 durch $^3/_4$ dividiren, untersuchen, welches die Zahl ist, die mit $^3/_4$ multiplizirt 15 gibt. Aus den Vorübungen (Seite 6 ff.) wissen wir, daß jeder Bruch in zweifacher Weise aufgefaßt werden kann. Darnach bezeichnet der Bruch $^3/_4$ entweder: 3mal oder das Dreifache des 4. Theils einer Zahl, oder: 1mal den 4. Theil vom Dreifachen einer Zahl. Die Zahl nun, welche mit $^3/_4$ multiplizirt 15 gibt, muß diejenige sein, a) von der 3mal ihr 4. Theil 15 ist, oder b) von der 1mal der 4. Theil ihres Dreifachen 15 beträgt. 15 ist also das Dreifache des 4. Theils der noch unbekannten Zahl; der 4. Theil dieser unbekannten Zahl ist daher der 3. Theil von 15, und diese noch unbekannte Zahl selbst muß folglich 4mal dieser 3. Theil von 15 sein. — Oder: Da 1mal der 4. Theil vom Dreifachen der unbekannten Zahl 15 ist, so ist diese unbekannte Zahl der 3. Theil von 4mal 15.

Die Zahl, welche 3mal genommen 15 gibt, wird gefunden, wenn man untersucht, a) der wie vielste Theil 3 von 15 ist, oder b) wenn man untersucht, wie oft 3 in 15 enthalten ist. Eben so: Die Zahl, welche $^3/_4$mal genommen 15 gibt, findet man, wenn man untersucht, a) der wie vielste Theil $^3/_4$ von 15 ist, oder b) wenn man untersucht, wie oft $^3/_4$ in 15 enthalten ist. — So kommt auch diese Erklärungsweise auf die vorhergehende zurück, und beide sind nur in der Art der Darstellung etwas verschieden; im Wesentlichen sind jedoch beide Ansichten Ein und Dasselbe. Hiedurch ist aber das Dividiren mit einem Bruche dem Dividiren mit einer ganzen Zahl so ziemlich nahe gebracht.

Die letztere Auffassungsweise des Dividirens durch einen Bruch muß besonders dann festgehalten werden, wenn der Dividend eine benannte Zahl, der Divisor aber eine unbenannte Bruchzahl ist. Z. B. mit $^3/_4$ soll in 15 fl. dividirt werden! — Hier kann von einem Dividiren im eigentlichen Sinne des Wortes wol nicht die Rede sein; denn wir wissen ja nicht, in wie viele gleiche Theile wir die 15 fl. theilen sollen. Der Begriff des Enthaltenseins ist ebenfalls ganz unzuläßig; denn die reine Zahl $^3/_4$, wie oftmal soll diese in Gulden enthalten sein? oder der wie vielste Theil soll $^3/_4$ von 15 Gulden sein? — es läßt sich dabei nichts Vernünftiges denken. Wir müssen daher die Sache aus einem andern Gesichtspunkte auffassen. Mit 3 in 15 fl. dividiren heißt auch: die Zahl der Gulden suchen, welche 3mal genommen 15 fl. gibt. Ebenso auch: Mit $^3/_4$ in 15 fl. dividiren heißt: die Zahl der Gulden suchen, welche $^3/_4$mal genommen 15 fl. gibt, d. i. von der 3mal der 4. Theil 15 fl., oder von deren Dreifachem der 4. Theil 15 fl. macht.

Daraus ersehen wir, daß das Dividiren einer benannten Zahl durch eine unbenannte Bruchzahl, und das Dividiren einer benannten Zahl durch eine unbenannte ganze Zahl fast Ein- und Dasselbe ist.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir nun über zur Division mit Brüchen, indem wir die hiebei möglichen verschiedenen Fälle aufstellen, und werden bei den Berechnungen selbst die aufgestellten Ansichten festhalten und daraus sodann die sich ergebenden Regeln ableiten.

a) Mündliche Uebungen.

In unbenannten Zahlen.

1. Division eines Bruches durch eine ganze Zahl.

Beispiel: Dividire $^4/_5$ durch 2?

In den Vorübungen (siehe „Mögliche Veränderungen mit Brüchen“ Seite 26, C. und Seite 27, D) ist gezeigt und erklärt worden, daß die Division eines Bruches mit einer ganzen Zahl auf zweifache Weise vollzogen werden kann, und zwar

1. indem der Zähler eines Bruches durch eine ganze Zahl dividirt und der Nenner unverändert gelassen wird (eigentliche Division); oder

2. daß man den Nenner des gegebenen Bruches mit der ganzen Zahl multiplizirt und den Zähler unverändert läßt (Division durch Multiplikation).

1. Berechnung: $^4/_5$ durch 2 dividiren heißt: $^4/_5$ in 2 gleiche Theile theilen und angeben, wie groß ein, hier der 2te oder halbe Theil von $^4/_5$ ist. Der 2te oder halbe Theil von 4 ist $(2 : 4 =)$ 2; folglich ist auch der 2te oder halbe Theil von $^4/_5$ $\left(\frac{2:4}{5}\right) = {}^2/_5$. Man dividirt also einen Bruch mit einer ganzen Zahl, indem man nur den Zähler des Bruches dividirt und dem Quotienten den Nenner des Bruches zum Nenner gibt. So auch: $^4/_5$ dividirt durch $3 = 3 : \frac{4}{5} = \frac{1^1/_3}{5} = {}^4/_{15}$.

Regel: **Soll ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden, so theilt man mit der ganzen Zahl in den Zähler des Bruches, und gibt dem Quotienten den Nenner des Bruches zum Nenner,** läßt den Nenner unverändert. — (Eigentliche Division.)

Dieses Verfahren wird indeß gewöhnlich nur dann angewendet, wenn der Divisor ohne Rest in dem Zähler des gegebenen Bruches enthalten ist, andernfalls man einen Doppelbruch erhält, der sodann wieder in einen einfachen Bruch aufzulösen ist, wie obiges Beispiel lehrt.

2. Berechnung: $^4/_5$ durch 2 dividiren heißt: den halben Theil von $^4/_5$ suchen. Der halbe Theil von 1 ist $= {}^1/_2$; von $^1/_2 = {}^1/_4$; von $^1/_5 = {}^1/_{10}$; denn wird $^1/_5$ in 2 gleiche Theile getheilt, so gibt Ein Ganzes oder 5 Fünftel 5mal $2 = 10$ solche Theile, die nun, da das Ganze in 10 gleiche Theile getheilt ist, 10tel heißen. $^1/_5$ hat also $^2/_{10}$, und der halbe Theil von $^2/_{10} = {}^1/_{10}$. Den Bruch $^1/_{10}$ erhalten wir auch aus $^1/_5$, wenn wir nur den Nenner des Bruches $^1/_5$ mit 2 vervielfachen und den Zähler unverändert beibehalten, nämlich $\frac{1}{5} \times 2 = {}^1/_{10}$. Daraus folgt: Wenn man den Nenner eines Bruches mit einer ganzen Zahl multiplizirt, so ist jetzt der Werth eines solchen Theiles des Bruches, der durch den neuen Nenner angezeigt wird, nur noch der so vielte Theil des vorigen Werthes, als die ganze Zahl, mit der der Nenner vervielfacht worden

ist, Einheiten hat. Es muß demnach der Werth eines solchen Bruches, dessen Nenner mit einer ganzen Zahl vervielfacht wurde, wenn der Zähler unverändert beibehalten wird, um so vielmal so klein, nur der so vielste Theil sein, als die ganze Zahl Einheiten hat.

Wird sonach der Nenner des Bruches $\frac{4}{5}$ mit 2 vervielfacht und der Zähler unverändert gelassen, so ist der Werth dieses Bruches ($\frac{4}{5}$) 2mal so klein, nur noch der halbe oder 2. Theil; der Bruch $\frac{4}{5}$ ist somit durch 2 dividirt.

Daher: $\frac{4}{5}$ getheilt durch $2 = \frac{4}{5 \times 2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

So auch: $\frac{4}{5}$ dividirt durch $3 = \frac{4}{5 \times 3} = \frac{4}{15}$.

Regel: *Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man den Nenner des Bruches mit einer ganzen Zahl multiplizirt und diesem Produkte den Zähler des Bruches zum Zähler gibt, oder wenn man den Zähler des Bruches unverändert beibehält und den Nenner desselben mit der ganzen Zahl vervielfacht.* (Division durch Multiplikation.)

Dieses Verfahren kann bei Division eines Bruches durch eine ganze Zahl immer angewendet werden.

3. Berechnung: $\frac{4}{5}$ durch 2 dividiren kann auch heißen: untersuchen, wie oft 2 in $\frac{4}{5}$ enthalten ist. Wie oft eine Größe in einer andern gleichartigen Größe enthalten ist, z. B. 2 Gulden in 40 kr., findet man am einfachsten, wenn man beide Größen (den Divisor und den Dividend) in *gleichnamige* Größen verwandelt, also die 2 Gulden in Kreuzer auflös't. Wir lösen also die 2 Ganze auch in 5tel auf; $1 = \frac{5}{5}$; $2 = 2 \times \frac{5}{5} = \frac{10}{5}$. Wir haben also jetzt zu untersuchen, wie oft $\frac{10}{5}$ in $\frac{4}{5}$ enthalten ist. 1 ist in 1 1mal, 1 in 2 2mal, 1 in 4 4mal enthalten; 2 ist in 1 nur $\frac{1}{2}$mal, 2 in 2 1mal, 2 in 4 2mal enthalten; 10 ist in 1 nur $\frac{1}{10}$mal, in 2 daher $\frac{2}{10}$mal, in 3 $\frac{3}{10}$mal, in 4 $\frac{4}{10}$mal enthalten. Da sich nun Fünftel zu Fünftel verhalten, wie Ganze zu Ganzen, so ist auch $\frac{1}{5}$ in $\frac{1}{5}$ 1mal, $\frac{1}{5}$ in $\frac{2}{5}$ 2mal, $\frac{1}{5}$ in $\frac{4}{5}$ 4mal enthalten; so auch ist $\frac{10}{5}$ in $\frac{1}{5}$ nur $\frac{1}{10}$mal, $\frac{10}{5}$ in $\frac{2}{5}$ sonach $\frac{2}{10}$mal, und $\frac{10}{5}$ in $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{10}$mal enthalten. Daher also: Der 2te, 3te, 4te, 5te rc. Theil einer Zahl ist in dem 2ten, 3ten, 4ten, 5ten rc. Theil einer andern Zahl so oft enthalten, als die ganze Zahl selbst in einer andern ganzen Zahl enthalten ist. $\frac{10}{5}$ ist in $\frac{4}{5}$ eben so oft enthalten, als 10 in 4. Man hat also in diesem Falle nur zu untersuchen, wie oft 10 in 4 enthalten ist. 10 ist in 1 $\frac{1}{10}$mal, in 2 $\frac{2}{10}$mal, in 3 $\frac{3}{10}$mal, in 4 $\frac{4}{10}$mal enthalten; es ist somit $\frac{10}{5}$ in $\frac{4}{5}$ ebenfalls $\frac{4}{10}$mal enthalten.

$\frac{4}{5}$ dividirt durch $2 = \frac{4}{5}$ dividirt durch $\frac{10}{5}$ u. gibt $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ zum Quotienten.

So auch $\frac{4}{5}$ dividirt durch 3!

$3 = 3 \times \frac{5}{5} = \frac{15}{5}$; $3 : \frac{4}{5} = \frac{15}{5}$ in $\frac{4}{5}$ ist eben so oft enthalten, als 15 in 4, nämlich $15 : 4 = \frac{4}{15}$mal.

Regel: *Soll ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden, so löset man die ganze Zahl in mit dem Bruche gleichnamige Theile auf und dividirt mit dem Zähler dieses aufgelös'ten uneigentlichen Bruches in den Zähler des*

gegebenen Bruches, d. h. man behandelt die beiden Zähler gerade so, als wären es ganze Zahlen, indem man die Nenner ganz unberücksichtigt läßt; der Quotient gibt die verlangte Größe.

Diese 3. Berechnungsart stimmt im Wesentlichen mit der 2. überein und ist nur in der Form etwas verschieden.

4. Berechnung: $^4/_5$ durch 2 dividiren heißt: den 2ten oder halben Theil von $^4/_5$ suchen. Der 2te oder halbe Theil von $^4/_5$ ist $^1/_2$mal $^4/_5$; der 2te oder halbe Theil von $^4/_5$ heißt also auch $^1/_2$mal $^4/_5$. Es verwandelt sich daher diese Division in eine Multiplikation. $^1/_5$ halbmal genommen ist $^1/_{10}$; $^2/_5$ halbmal genommen ist $^2/_{10}$; $^4/_5$ halbmal genommen gibt $^4/_{10} = {^2/_5}$. $^4/_5$ dividirt durch $2 = {^1/_2} \times {^4/_5}$; oder $2 : {^4/_5} = {^1/_2} \times {^4/_5} = {^4/_{10}} = {^2/_5}$.

So auch $^4/_5$ dividirt durch 3 heißt, den 3ten Theil von $^4/_5$ suchen; der 3te Theil von $^4/_5$ ist $^1/_3$mal $^4/_5$; daher $3 : {^4/_5} = {^1/_3} \times {^4/_5} = {^4/_{15}}$.

Regel: Soll ein Bruch durch eine ganze Zahl getheilt werden, so verwandelt man den Divisor in einen Stamm-Bruch, indem man der ganzen Zahl (dem Divisor) 1 zum Zähler gibt, sie selbst zum Nenner nimmt, und multiplizirt den zu theilenden Bruch mit diesem Bruche, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner vervielfacht; das Produkt gibt die verlangte Größe.

Auf diese Weise verwandelt sich also die Division eines Bruches in eine Multiplikation, und es ist gleich, d. h. man kommt zu demselben Resultat, ob man $^4/_5$ durch 2 dividirt oder mit $^1/_2$ multiplizirt. Dieses letzte Verfahren ist mit der 2. Berechnungsart im Wesentlichen identisch.

Ein Bruch kann also auf vierfache Weise durch eine ganze Zahl dividirt werden.

2. Division einer gemischten Zahl durch eine ganze Zahl.

1. Beispiel: Dividire $6^3/_5$ durch 3!

1. Berechnung: Wir zerfällen den Dividend $6^3/_5$ in $6 + {^3/_5}$ und theilen nun zuerst in 6 und sodann in $^3/_5$. Der dritte Theil von 6 ist $(3 : 6 =)$ 2; der 3te Theil von 3 ist $(3 : 3 =)$ 1; der 3te Theil von $^3/_5$ ist folglich $^1/_5$; der 3te Theil von $6^3/_5$ ist also $2 + {^1/_5} = 2^1/_5$.

2. Berechnung: Lösen wir die gemischte Zahl $6^3/_5$ in einen unächten Bruch auf, also $6^3/_5 = {^{33}/_5}$, so ist das Verfahren ganz dasselbe, wie oben bei ächten Brüchen gezeigt worden ist. Also nach der

1. Berechnung. $6^3/_5 = {^{33}/_5}$ durch 3 dividiren heißt: $^{33}/_5$ in 3 gleiche Theile theilen und angeben, wie groß ein, hier der 3te Theil von $^{33}/_5$ ist. Der 3. Theil von 33 ist $(3 : 33 =)$ 11; folglich auch der 3. Theil von $^{33}/_5$ $\left(3 : \frac{33}{5} =\right)$ $^{11}/_5 = 2^1/_5$. $6^3/_5$ durch 3 dividirt gibt somit $2^1/_5$.

2. Berechnung. $6^3/_5$ durch 3 theilen heißt: den dritten Theil von $6^3/_5 = {^{33}/_5}$ suchen. Der 3te Theil von $^{33}/_5$ muß aber eine 3mal so kleine Zahl sein; ein Bruch wird 3mal so klein, d. i. wird der dritte Theil seines Werthes, wenn man, wie oben zum 1. Falle bei der 2. Berechnung nachgewiesen wurde, den Nenner mit 3 multiplizirt und den Zäh-

ler unverändert läßt; also $\frac{33}{5} \times 3 = {}^{33}/_{15} = 2^3/_{15} = 2^1/_5$. $6^3/_5$ durch 3 dividirt gibt somit wieder $2^1/_5$.

3. Berechnung. $6^3/_5$ durch 3 dividiren kann auch heißen: untersuchen, wie oft 3 in $6^3/_5$ enthalten ist. Wir lösen $6^3/_5$ wieder in einen unächten Bruch auf und machen die ganze Zahl mit dem unächten Bruche gleichnamig, also $6^3/_5 = {}^{33}/_5$; $3 = 3 \times \frac{5}{5} = {}^{15}/_5$; ${}^{15}/_5$ in ${}^{33}/_5$ ist eben so oft enthalten, als 15 in 33, nämlich $(15 : 33 =)\ 2^3/_{15} = 2^1/_5$mal. Sonach wieder: $3 : 6^3/_5 = 2^1/_5$.

4. Berechnung. $6^3/_5$ durch 3 dividiren heißt; den 3ten Theil von $6^3/_5$ suchen. $6^3/_5 = {}^{33}/_5$. Der 3te Theil von ${}^{33}/_5$ ist $^1/_3$mal ${}^{33}/_5$; $^1/_3$mal ${}^{33}/_5 = {}^{33}/_{15} = 2^3/_{15} = 2^1/_5$. Daher wieder: $3 : 6^3/_5 = 2^1/_5$.

Regel: **Soll eine gemischte Zahl durch eine ganze Zahl getheilt werden, so dividirt man mit der ganzen Zahl zuerst in die Ganzen, sodann in den Bruch der gegebenen gemischten Zahl und addirt die beiden erhaltenen Quotienten, was die verlangte Zahl gibt. Oder: Man löset die gemischte Zahl in einen unächten Bruch auf und verfährt nach den zum ersten Falle gegebenen Regeln.**

2. Beispiel: Dividire $4^2/_3$ durch 8!

1. Berechnung (durch Division des Zählers): $4^2/_3 = {}^{14}/_3$; $8 : 14 = 1^6/_8 = 1^3/_4$; $8 : \frac{14}{3} = \frac{1^6/_8}{3} = \frac{1^3/_4}{3}$; $\frac{1^3/_4}{3} = {}^7/_{12}$. Diese Berechnungsart wird gewöhnlich nicht angewendet.

2. Berechnung (durch Multiplikation des Nenners): $4^2/_3 = {}^{14}/_3$; $\frac{14}{3} \times 8 = {}^{14}/_{24} = {}^7/_{12}$.

3. Berechnung (durch Enthaltensein): $4^2/_3 = {}^{14}/_3$; $8 = 8 \times {}^3/_3 = {}^{24}/_3$; ${}^{24}/_3 : {}^{14}/_3 = 24 : 14 = {}^{14}/_{24} = {}^7/_{12}$.

4. Berechnung (durch Umwandlung der Division in eine Multiplikation): $4^2/_3 = {}^{14}/_3$; $8 : {}^{14}/_3 = {}^1/_8 \times {}^{14}/_3 = {}^{14}/_{24} = {}^7/_{12}$. $4^2/_3$ dividirt durch 8 gibt also ${}^7/_{12}$ zum Quotienten. In allen ähnlichen Fällen wird gewöhnlich nur die 2. oder 4. Berechnungsart angewendet.

3. Beispiel: Dividire $7^5/_6$ durch 4!

Berechnung. $7^5/_6 = {}^{47}/_6$. $4 : {}^{47}/_6 = \frac{47}{6} \times 4 = {}^{47}/_{24} = 1^{23}/_{24}$.
Oder: $4 : {}^{47}/_6 = {}^1/_4 \times {}^{47}/_6 = {}^{47}/_{24} = 1^{23}/_{24}$.
$7^5/_6$ dividirt durch 4 gibt $1^{23}/_{24}$ zum Quotienten.

3. Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch.

1. Beispiel: Dividire 15 durch $^3/_4$!

1. Berechnung: In diesem Falle kann von Theilen im eigentlichen Sinne wol nicht die Rede sein; denn wir können ja nicht sagen, in wie viele gleiche Theile 15 getheilt werden soll. Wir müssen daher die Sache anders auffassen. 15 durch $^3/_4$ dividiren kann heißen: untersuchen, wie oft $^3/_4$ in 15 enthalten ist, oder: der wie vielste Theil $^3/_4$ von 15 ist.

Um dies finden zu können, müssen Divisor und Dividend gleiche Benennung haben; wir haben also 15 ebenfalls in Viertel zu verwandeln. $1 = 4$ Viertel ($^4/_4$); $15 = 15$mal $4 = 60$ Viertel ($^{60}/_4$). $^3/_4$ sind in $^{60}/_4$ so oftmal enthalten, als 3 in 60. $3 : 60 = 20$mal; daher auch: $^3/_4 : {}^{60}/_4 = 20$mal. $^3/_4$ ist in 15 also 20mal enthalten, folglich ist auch $^3/_4$ der 20. Theil von 15. 15 durch $^3/_4$ dividirt gibt somit 20.

Regel: Soll eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden, so macht man die ganze Zahl mit dem Bruche gleichnamig und dividirt dann mit dem Zähler des Divisors in den Zähler des Dividenden. Der Quotient ist die gesuchte Zahl. (Man behandelt die beiden Zähler gerade so, als wären sie nur ganze Zahlen.)

2. Berechnung: 15 durch $^3/_4$ dividiren heißt auch: die Zahl suchen, die $^3/_4$mal genommen 15 gibt, d. i. deren 4ter Th. 3mal genommen, oder von deren Dreifachem der 4te Theil 15 gibt. 15 ist sonach 3mal der 4te Theil der noch unbekannten Zahl. 1mal der 4te Theil dieser noch unbekannten Zahl ist daher der 3te Theil von $15 = (3 : 15 =) 5$. Da der 3te Theil von 15, also 5 der 4te Theil der noch unbekannten Zahl ist, so ist diese Zahl selbst 4mal $5 = 20$.

Oder: 15 ist der 4te Theil vom Dreifachem der noch unbekannten Zahl; das Dreifache dieser Zahl ist also 4mal $15 = 60$. Da 60 das Dreifache der unbekannten Zahl ist, so wird ihr Einfaches, d. h. die Zahl selbst der 3te Theil von 60 sein, nämlich $3 : 60 = 20$. — Die Zahl, welche $^3/_4$mal genommen 15 gibt, ist somit 20; daher auch 15 durch $^3/_4$ dividirt gibt 20 zum Quotienten.

Regel: Soll eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden, so theilt man die ganze Zahl mit dem Zähler des Bruches und multiplizirt den erhaltenen Quotienten mit dem Nenner desselben; dieses Produkt ist die verlangte Zahl. Oder: Man multiplizirt die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches und dividirt das erhaltene Produkt mit dem Zähler desselben; der Quotient ist die verlangte Zahl.

3. Berechnung: Wird 15 durch 3 dividirt, so erhält man $(3 : 15 =) 5$ zum Quotienten. Es soll aber 15 nicht durch 3, sondern nur durch $^3/_4$, d. i. durch den 4ten Thl. von 3 dividirt werden, also mit einer 4mal so kleinen Zahl. Wird demnach 15 durch 3, statt durch $^3/_4$ dividirt, so theilt man offenbar durch eine Zahl, die 4mal so groß ist, als diejenige ist, durch welche dividirt werden sollte. Je größer der Divisor ist, einen desto kleinern Quotienten erhält man. In dem gegebenen Falle wird also, wenn man mit 3, statt mit $^3/_4$ dividirt, der Quotient 4mal so klein sein, als er sein sollte, und deßwegen muß man den durch Division mit 3 erhaltenen Quotienten 4mal nehmen, mit 4 multipliziren, um den wahren Quotienten zu erhalten; also 4mal $5 = 20$. —

Oder: Dividirte ich mit 3 in 15, statt mit $^3/_4$, so würde ich mit einer 4mal so großen Zahl theilen, als dieses geschehen sollte. Um nun dennoch denselben Quotienten zu erhalten, den man erhält, wenn man mit $^3/_4$ in 15 dividirt, muß ich den Dividendus 15 ebenfalls 4mal so groß

nehmen, also 15 mit 4 vervielfachen, und sodann in dieses Produkt mit 3 theilen, nämlich: $4 \times 15 = 60$; $3:60 = 20$. — 15 dividirt durch $^3/_4$ gibt wieder 20 zum Quotienten. — Es ergibt sich also dasselbe Resultat, wie vorher, wenn ich die ganze Zahl 15 zuerst mit 4 multiplizire und das Produkt mit 3 dividire.

Diese 3. Berechnungsart stimmt mit der vorhergehenden 2. in der Ausführung ganz überein, und deßwegen gilt auch hiefür dieselbe Regel.

4. Berechnung. Wird 15 durch 3 getheilt, so erhält man zum Quotienten den 3. Theil $= ^1/_3$ von 15; der Quotient ist also $^1/_3$mal 15. Nun soll 15 aber mit $^3/_4$, also mit einer 4mal so kleinen Zahl dividirt werden. Je kleiner der Divisor ist, einen desto größern Quotienten wird man erhalten; folglich muß man zum Quotienten 4mal den 3. Th. $= ^4/_3$ von 15 erhalten. Der Quotient wird, wenn man 15 durch $^3/_4$ dividirt, $^4/_3$mal $15 = ^{60}/_3 = 20$ sein. 15 durch $^3/_4$ dividiren heißt also auch: von 15 den 3. Thl. 4mal oder 15 $^3/_4$mal nehmen. Somit verwandelt sich die Division durch einen Bruch in eine Multiplikation und zwar in der Art, daß man den Zähler des Divisors zum Nenner und dessen Nenner zum Zähler nimmt, was man das Umkehren oder Stürzen des Divisors nennt. 15 dividirt durch $^3/_4$ gibt auch so wieder ($^3/_4 : 15 = ^4/_3 \times 15 =$) 20 zum Quotienten.

Auch dieses Verfahren stimmt mit den vorigen Berechnungen überein und ist im Wesentlichen dasselbe.

Regel: Soll eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden, so stürzt man den Divisor, d. h. man nimmt den Zähler zum Nenner und den Nenner zum Zähler, und multiplizirt die ganze Zahl mit dem gestürzten Bruch, d. h. man vervielfacht die ganze Zahl mit dem Zähler und gibt dem Produkte den Nenner des Bruches zum Nenner.

2. Beispiel: Dividire 9 durch $^5/_6$!

1. Berechnung. 9 durch $^5/_6$ dividiren heißt: untersuchen, wie oft $^5/_6$ in 9 enthalten ist, oder der wie vielste Theil $^5/_6$ von 9 ist. Machen wir den Dividend 9 mit dem Divisor $^5/_6$ gleichnamig! $9 = 9 \times \frac{6}{6} = ^{54}/_6$; $^5/_6 : ^{54}/_6 = 5 : 54 = 10^4/_5$.

Die weitere Erklärung wie bei dem 1. Beispiel zur 1. Berechnung.

2. Berechnung. 9 durch $^5/_6$ dividiren heißt: a) eine Zahl suchen, die $^5/_6$mal genommen 9 gibt, d. i. deren 6. Theil 5mal genommen 9 gibt. Da der 6. Theil der unbekannten Zahl 5mal genommen 9 ist, so ist ihr 6. Theil der 5. Theil von 9, d. i. $^9/_5$, und die ganze Zahl selbst 6mal $^9/_5 = ^{54}/_5 = 10^4/_5$.

Oder b): deren 6. Theil ihres Fünffachen 9 ist. Da der 6. Theil ihres Fünffachen 9 ist, so ist ihr Fünffaches 6mal $9 = 54$; ist das Fünffache der noch unbekannten Zahl 54, so ist ihr Einfaches, d. i. die Zahl selbst der 5. Theil von 54 ($5 : 54$) $^{54}/_5 = 10^4/_5$.

3. Berechnung: Wird 9 durch 5 dividirt, so erhält man ($5 : 9 =$) $^9/_5$ zum Quotienten. 5 ist aber 6mal so groß als $^5/_6$, darum ist der Quotient $^9/_5$ 6mal so klein, als er sein sollte, und wir müssen ihn deßwegen noch mit 6 vervielfachen, also $\frac{9}{5} \times 6 = ^{54}/_5 = 10^4/_5$.

Oder: Dividirt man mit 5, statt mit $^5/_6$, also mit einem 6mal so großen Divisor, so muß, wenn sich ein gleiches Resultat ergeben soll, der Dividend 9 ebenfalls 6mal so groß genommen werden, als er wirklich ist; man muß also 9 mit 6 multipliziren, was 54 ist, welches Produkt nun mit 5 dividirt den wahren Quotienten gibt. Also $9 \times 6 = 54$; $5 : 54 = 10^4/_5$.

4. Berechnung: Wird 9 durch 5 getheilt, so erhält man zum Quotienten den 5. Theil $= ^1/_5$ von 9; der Quotient ist also $^1/_5$mal 9. 9 soll aber mit $^5/_6$, also mit einer 6mal so kleinen Zahl dividirt werden, daher muß man einen 6mal so großen Quotienten erhalten. Der wahre Quotient ist also 6mal der 5. Theil oder $^6/_5$mal 9; $^6/_5 \times 9 = ^{54}/_5 = 10^4/_5$.

9 durch $^5/_6$ dividirt gibt also $10^4/_5$ zum Quotienten, ist $10^4/_5$.

4. Division einer ganzen Zahl durch eine gemischte Zahl.

Beispiel: Dividire 9 durch $2^2/_3$!

Berechnung: Die gemischte Zahl muß in einen unächten Bruch aufgelös't werden. $2^2/_3 = ^8/_3$. Die Rechnung heißt jetzt: „Dividire 9 durch $^8/_3$." Die Berechnungen können nun ganz in denselben Weisen gelös't werden, wie im vorhergehenden 3. Falle: „Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch" gezeigt worden ist, und es gelten auch hier dieselben Regeln. Nämlich: a) $2^2/_3 = ^8/_3$; $9 \times \frac{3}{3} = ^{27}/_3$; $2^2/_3 : 9 = ^8/_3 : ^{27}/_3 = 8 : 27 = 3^3/_8$. b) $2^2/_3 : 9 = ^8/_3 : 9$. — $^8/_3$mal die unbekannte Zahl $= 9$; $^1/_3$ dieser Zahl $= ^9/_8$; die ganze Zahl selbst $= 3 \times ^9/_8 = ^{27}/_8 = 3^3/_8$.

Oder: $^8/_3$ der unbekannten Zahl $= 9$; das Achtfache dieser Zahl $= 3 \times 9 = 27$; das Einfache derselben oder die Zahl selbst $= ^{27}/_8 = 3^3/_8$. c) $8 : 9 = ^9/_8$; da man mit einer 3mal so großen Zahl dividirt hat, so muß man den Quotienten $^9/_8$ noch 3mal nehmen; $3 \times ^9/_8 = ^{27}/_8 = 3^3/_8$.

Oder: Statt daß man mit $^8/_3$ in 9 dividirt, dividire man mit 8 in einen 3mal so großen Dividenden, als 9; also $3 \times 9 = 27$; $8 : 27 = 3^3/_8$. d) 9 durch $^8/_3$ dividiren kann auch heißen: den 8. Theil von 9 3mal, d. i. 9 $^3/_8$mal nehmen, also 9 mit $^3/_8$ multipliziren. $^3/_8 \times 9 = ^{27}/_8 = 3^3/_8$.

Auch folgende Berechnung ist im Wesentlichen dasselbe: $2^2/_3 : 9 = ^8/_3 : 9$. — 1 ist in 1 1mal enthalten; $^1/_2$ oder die Hälfte von 1 ist daher in 1 2mal, $^1/_3$ von 1 3mal enthalten; 1 ist in 9 9mal enthalten; $^1/_2$ von 1 muß somit in 9 2mal so oft, $^1/_3$ von 1 3mal so oft enthalten sein, als 1 in 9 enthalten ist oder als 9 Einheiten hat. Da 1 in 9 9mal enthalten ist, so ist $^1/_3$ in 9 $3 \times 9 = 27$mal enthalten. — 1 ist in 9 9mal enthalten; 2 ist 2mal 1, daher ist 2 in 9 nur $^1/_2$ so oft rc., und 8 ist 8mal 1, folglich ist 8 in 9 nur $^1/_8$ so oft, nur den 8. Theil so oft in 9 enthalten. Ebenso dann auch: Ist $^1/_3$ in 9 $(3 \times 9 =)$ 27mal enthalten, so sind $^2/_3$, weil $^2/_3$ 2mal $^1/_3$ sind, auch nur halb so oft, und $^8/_3 = 8$mal $^1/_3$ nur den 8. Theil so oft in 9 enthalten, als $^1/_3$. $^1/_3$ ist in 9 $(3 \times 9 =)$ 27mal enthalten, folglich $^8/_3$ in 9 nur $^{27}/_8 = 3^3/_8$mal. Also auch hier wieder: 9 durch $2^2/_3$ dividirt, gibt $3^3/_8$ zum Quotienten.

Regel: **Soll eine ganze Zahl durch eine gemischte Zahl dividirt werden, so löset man die gemischte Zahl in einen unächten Bruch auf, multiplizirt die ganze Zahl (den Dividend) mit dem Nenner des Bruches (des Divisors) und dividirt**

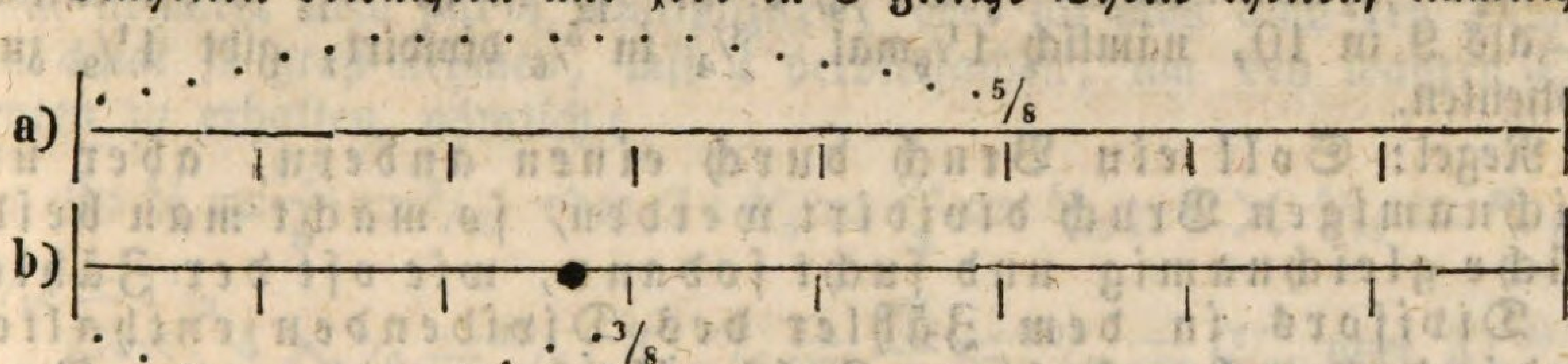
mit dem Zähler desselben das erhaltene Produkt; der Quotient ist die verlangte Zahl.

5. Division eines Bruches durch einen Bruch.

1. Beispiel: Dividire $^5/_8$ durch $^3/_8$! (Dividend und Divisor sind gleichnamig).

Berechnung: $^5/_8$ dividirt durch $^3/_8$ heißt: untersuchen, wie oft $^3/_8$ in $^5/_8$ enthalten ist, oder der wie vielste Theil $^3/_8$ von $^5/_8$ ist. Da Divisor und Dividend gleichnamig sind, so ist $^3/_8$ in $^5/_8$ so oft enthalten, als 3 in 5 enthalten ist, wie oben zum 1. Fall bei der 3. Berechnung erklärt und mit Gründen nachgewiesen worden. Wir haben also nur zu untersuchen, wie oft 3 in 5 enthalten ist. 3 in 5 ist $^5/_3 = 1^2/_3$mal enthalten, also $^3/_8$ in $^5/_8$ auch $1^2/_3$mal. $^5/_8$ durch $^3/_8$ dividirt gibt ($^3/_8 : {}^5/_8 = 3:5 =$) $^5/_3 = 1^2/_3$ zum Quotienten.

Dieses läßt sich auch durch Linien zur Anschauung bringen, die wir als Einheiten betrachten und jede in 8 gleiche Theile theilen, nämlich:



Nehmen wir von a 5 Theile ($^5/_8$) und von b 3 Theile ($^3/_8$)! Ist nun die Frage: „Wie oft ist $^3/_8$ in $^5/_8$ enthalten?" so zeigt schon die Anschauung, daß man hier zu untersuchen hat, wie oft 3 in 5 enthalten ist, um zu erfahren, wie oft $^3/_8$ in $^5/_8$ enthalten ist. Zugleich lehrt auch die Anschauung, daß 3 solche Theile in 5 gleichen Theilen $1^2/_3$mal, folglich $^3/_8$ in $^5/_8$ ebenfalls $1^2/_3$mal enthalten ist.

Regel: Soll ein Bruch durch einen andern gleichnamigen Bruch dividirt werden, so hat man nur zu untersuchen, wie oft der Zähler des Divisors in dem Zähler des Dividenden enthalten ist; die dadurch erhaltene Zahl gibt den verlangten Quotienten. Die beiden Nenner können somit ganz unberücksichtigt bleiben, indem man die Zähler so zu behandeln hat, als wären es ganze Zahlen.

Die andern Berechnungsarten können, wenn das bisher Gesagte richtig aufgefaßt worden, keine Schwierigkeiten mehr darbieten; sollen indeß doch noch an nachfolgendem Beispiele vorgeführt werden.

2. Beispiel: Dividire $^5/_6$ durch $^3/_4$! (Divisor und Dividend sind ungleichnamig.)

1. Berechnung: $^5/_6$ durch $^3/_4$ dividiren heißt: untersuchen, wie oft $^3/_4$ in $^5/_6$ enthalten ist, oder der wie vielste Theil $^3/_4$ von $^5/_6$ ist. Hier haben wir aber ungleichnamige Brüche. Wie oft eine Größe in einer andern Größe enthalten ist, oder der wie vielste Theil eine Größe von einer andern ist, können wir nur dann untersuchen, wenn beide Größen gleichartig sind, und die, wenn die Berechnung ausgeführt werden soll, gleichnamig sein, oder gleichnamig gemacht werden müssen. Wie

oft z. B. $^3/_4$ fl. in 5 oder in $^5/_6$ ℔ enthalten sind, oder der wie vielste Theil $^3/_4$ fl. von 5 oder $^5/_6$ ℔ ist, kann man nicht untersuchen, das hat keinen Sinn; folglich kann man auch mit $^3/_4$ fl. in 5 oder $^5/_6$ ℔ nicht dividiren. Wol aber läßt sich untersuchen, wie oft $^3/_4$ Lth. in $^5/_6$ Loth oder in $^5/_6$ ℔ enthalten sind; ebenso auch wie oft $^3/_4$ (mal Eins) in $^5/_6$ (mal Eins) enthalten ist, oder der wie vielste Theil es ist, weil sich die Werthe auf gleichartige Größen beziehen. Indeß kann die Berechnung selbst doch noch nicht ausgeführt werden, weil die Brüche nicht gleichnamig, d. h. die Werthe der Bruchtheile nicht von gleicher Größe sind. Nur gleich große Werththeile können gegen gleich große unmittelbar gemessen werden, und daher müssen die beiden Brüche, deren Nenner die verschiedenen Werthgrößen ihrer Theile bestimmen, vor der Divisions-Ausführung gleichnamig gemacht werden. Daher: $^3/_4 = {^9/_{12}}$; $^5/_6 = {^{10}/_{12}}$. Nun ist die Berechnung ganz dieselbe, wie im vorigen Beispiele, wo beide Brüche schon gleichnamig gegeben sind, nämlich:

$^9/_{12} : {^{10}/_{12}} = 9 : 10 = {^{10}/_9} = 1^1/_9$, d. h. $^9/_{12}$ ist in $^{10}/_{12}$ so oft enthalten, als 9 in 10, nämlich $1^1/_9$mal. $^3/_4$ in $^5/_6$ dividirt, gibt $1^1/_9$ zum Quotienten.

Regel: Soll ein Bruch durch einen andern, aber ungleichnamigen Bruch dividirt werden, so macht man beide Brüche gleichnamig und sucht sodann, wie oft der Zähler des Divisors in dem Zähler des Dividenden enthalten ist; die dadurch erhaltene Zahl gibt den verlangten Quotienten.

2. Berechnung. $^5/_6$ durch $^3/_4$ dividiren heißt: eine Zahl suchen, die $^3/_4$mal genommen $^5/_6$ gibt, d. i. deren 4. Theil 3mal genommen $^5/_6$ gibt. Wenn der 4. Theil der zu suchenden Zahl 3mal genommen $^5/_6$ ist, so ist ihr 4. Theil 1mal genommen der 3. Theil von $^5/_6 = \frac{^5/_6}{3} = {^5/_{18}}$. Ist der 4. Theil dieser Zahl $^5/_{18}$, so ist die ganze Zahl selbst 4mal $^5/_{18} = {^{20}/_{18}} = 1^2/_{18} = 1^1/_9$.

Oder: $^5/_6$ durch $^3/_4$ dividiren heißt: eine Zahl suchen, von deren Dreifachem der 4. Theil $^5/_6$ gibt. Ist $^5/_6$ das Dreifache des 4. Theiles der unbekannten Zahl, so ist das Dreifache dieser ganzen Zahl 4mal $^5/_6 = {^{20}/_6}$, und ihr Einfaches, d. i. die Zahl selbst der 3. Theil von $^{20}/_6 = {^{20}/_{18}} = 1^2/_{18} = 1^1/_9$.

Nach dieser Berechnung ersehen wir, daß es nicht nothwendig ist, die zur Division gegebenen ungleichnamigen Brüche gleichnamig zu machen.

Regel: Soll ein Bruch durch einen Bruch dividirt werden, so theilt man den Dividenden mit dem Zähler und multiplizirt den erhaltenen Quotienten mit dem Nenner des Divisors; das sich ergebende Produkt gibt die verlangte Zahl. Oder: Man multiplizirt den Dividenden mit dem Nenner und dividirt das erhaltene Produkt durch den Zähler des Divisors; der sich ergebende Quotient gibt die verlangte Zahl.

3. Berechnung. $^5/_6$ durch $^3/_4$ dividiren heißt: untersuchen, wie oft

$^3/_4$ in $^5/_6$ enthalten ist. 3 ist in 1 $^1/_3$mal enthalten; 3 ist in $^1/_6$ (d. i. im 6. Theil von 1) auch nur den 6. Theil von $^1/_3$mal, also $\frac{1/3}{6} = {}^1/_{18}$mal enthalten. Ist 3 in $^1/_6$ $^1/_{18}$mal enthalten, so ist 3 in $^5/_6$ 5 mal $^1/_{18} = {}^5/_{18}$mal enthalten; die Hälfte von 3 ist in $^5/_6$ daher 2mal, ein Drittel von 3 3mal, ein Viertel von 3 sonach 4mal so oft enthalten, als 3 selbst. Da nun 3 in $^5/_6$ $^5/_{18}$mal enthalten ist, so muß $^3/_4$ in $^5/_6$ 4mal $^5/_{18} = {}^{20}/_{18} = 1{}^2/_{18} = 1{}^1/_9$mal enthalten sein. Oder: So oft $^3/_4$ in $^5/_6$ enthalten ist, so oft wird 3, als einem 4mal so großen Divisor, in einem ebenfalls 4mal so großen Dividenden, also in 4mal $^5/_6 = {}^{20}/_6$, enthalten sein. Da nun 3 in $^1/_6$ $^1/_{18}$mal enthalten ist, so ist 3 in $^{20}/_6$ $^{20}/_{18} = 1{}^2/_{18} = 1{}^1/_9$mal enthalten. Das heißt nun:

Wird mit 3 in $^5/_6$ dividirt, so theilt man mit einer 4mal so großen Zahl, als dieses geschehen sollte. Ich muß nun entweder den erhaltenen Quotienten, der auf diese Weise 4mal so klein wird, als er sein sollte, 4mal nehmen, also mit 4 multiplizinen; oder ich muß auch den Dividenden 4mal so groß nehmen, mit 4 vervielfachen, um den wahren Quotienten zu erhalten, nämlich:

$3 : {}^5/_6 = \frac{1{}^2/_3}{6} = {}^5/_{18}$, oder $3 : {}^5/_6 = \frac{^5/_6}{3} = {}^5/_{18}$; $4 \times {}^5/_{18} = {}^{20}/_{18} = 1{}^2/_{18} = 1{}^1/_9$

Oder: $4 \times {}^5/_6 = {}^{20}/_6$; $3 : {}^{20}/_6 = \frac{6{}^2/_3}{6} = {}^{20}/_{18} = 1{}^1/_9$, oder $3 : {}^{20}/_6 = \frac{^{20}/_6}{3} = {}^{20}/_{18} = 1{}^1/_9$.

Dividirt wird auch in einen Bruch mit einer ganzen Zahl, wie wir wissen, wenn man den Nenner des Bruches mit der ganzen Zahl multiplizirt, was gewöhnlich in solchen Fällen angewendet wird, wenn der Divisor in dem Zähler des Dividenden nicht ohne Rest enthalten ist. Daher stellt sich die Berechnung auf folgende Weise heraus:

$3 : {}^5/_6 = \frac{5}{6 \times 3} = {}^5/_{18}$; $4 \times {}^5/_{18} = {}^{20}/_{18} = 1{}^1/_9$.

Oder: $4 \times \frac{5}{6} = {}^{20}/_6$; $3 : {}^{20}/_6 = \frac{20}{6 \times 3} = {}^{20}/_{18} = 1{}^1/_9$.

Aus dieser Berechnungsform ersehen wir, daß der Nenner des Dividenden mit dem Zähler, und dessen Zähler mit dem Nenner des Divisors vervielfacht wird. Daraus folgt nun die

Regel: Soll ein Bruch durch einen Bruch dividirt werden, so multiplizirt man den Zähler des Dividenden mit dem Nenner des Divisors, das Produkt gibt den Zähler des Quotienten; sodann vervielfacht man den Nenner des Dividenden mit dem Zähler des Divisors, und nimmt dieses Produkt zum Nenner des Quotienten; dieser Bruch ist sodann die verlangte Zahl.

In manchen Rechnungsbüchern ist die Art des Dividirens eines Bruches durch einen Bruch nach obiger Regel durch 2 schief durcheinander laufende Striche in folgender Weise anschaulich gemacht:

$^3/_4 : {}^5/_6 = {}^3/_4 \times {}^5/_6 = {}^{20}/_{18} = 1{}^2/_{18} = 1{}^1/_9$.

4. Berechnung. $^5/_6$ durch $^3/_4$ dividiren heißt: eine Zahl suchen, die $^3/_4$mal genommen $^5/_6$ gibt. $^3/_4 = 3$mal $^1/_4$; 3mal $^1/_4$ der zu suchenden Zahl ist $^5/_6$; 1mal $^1/_4$ dieser Zahl ist der 3. Theil von $^5/_6$; 4mal $^1/_4$ $= {}^4/_4$ dieser Zahl, d. i. die Zahl selbst ist also 4mal der 3. Theil von $^5/_6$; 4mal der 3. Theil oder 4mal $^1/_3$ von $^5/_6 = {}^4/_3$mal $^5/_6 = {}^{20}/_{18} = 1^1/_9$.

Oder: Da 3mal $^1/_4$ der zu suchenden Zahl $^5/_6$ ist, so ist 3mal $^4/_4$ oder das Dreifache dieser ganzen Zahl 4mal $^5/_6$; 1mal oder das Einfache dieser Zahl ist daher der 3. Theil von 4mal $^5/_6$. Der 3. Theil oder $^1/_3$ von 4mal $^5/_6$ ist ebenfalls wieder $^4/_3$mal $^5/_6 = {}^{20}/_{18} = 1^1/_9$.

$^5/_6$ durch $^3/_4$ dividirt $= {}^4/_3$mal $^5/_6 = {}^{20}/_{18} = 1^1/_9$, welches die verlangte Zahl, also der Quotient ist.

Hier verwandelt sich die Division, so aufgefaßt, in eine Multiplikation, indem man nur mit dem umgekehrten Divisor den Dividenden zu vervielfachen braucht. Es ist demnach einerlei, ob man mit $^3/_4$ in $^5/_6$ dividirt, oder $^5/_6$ mit $^4/_3$ multiplizirt, denn $^3/_4 : {}^5/_6 = \frac{4 \times 5}{3 \times 6} = {}^{20}/_{18}$, und $^4/_3 \times {}^5/_6 = {}^{20}/_{18}$. Daher dann die fast allgemein nur angewendete praktische (praktisch-mechanische)

Regel: **Soll ein Bruch durch einen Bruch dividirt werden, so kehre (stürze) man den Divisor um**, d. h. man mache den Zähler zum Nenner und den Nenner zum Zähler, **und multiplizire sodann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner; der dadurch entstehende Bruch ist der verlangte Quotient oder die verlangte Zahl.**

Alle 3 Berechnungsweisen sind im Wesentlichen dasselbe, und daher lassen sich auch die gegebenen Regeln auf diese letzte reduziren. Aber man thut sehr wol daran, das Dividiren mit Bruchzahlen auf so mannichfache und umständliche Weise mit Schülern durchzunehmen, wenn sie zu klarer Einsicht der Sache kommen sollen; denn gerade diese Rechnungsart bietet so manches scheinbar Widersprechende dar, was dem Lehrer und den Schülern viele Schwierigkeiten verursacht, wenn ein gründliches Auffassen der Sachverhältnisse erstrebt werden und man sich nicht mit dem unverstandenen Mechanismus begnügen will.

6. Division einer gemischten Zahl durch einen Bruch.

Beispiel: Dividire $2^1/_4$ durch $^3/_5$!

1. Berechnung. Ist eine gemischte Zahl durch einen Bruch zu dividiren, so löſ't man jene in einen unächten Bruch auf und verfährt dann ganz so, wie vorher gezeigt, wenn ein Bruch durch einen Bruch zu dividiren ist. — $2^1/_4 = {}^9/_4$; $^9/_4$ soll durch $^3/_5$ dividirt werden. $^9/_4 = {}^{45}/_{20}$; $^3/_5 = {}^{12}/_{20}$. Also $^3/_5 : {}^9/_4 = {}^{12}/_{20} : {}^{45}/_{20} = 12 : 45 = 3^9/_{12} = 3^3/_4$.

2. Berechnung. Die zu suchende Zahl ist die, welche $^3/_5$mal genommen $^9/_4$ gibt. $^3/_5 = 3$mal $^1/_5$; da 3mal $^1/_5$ der zu suchenden Zahl $^9/_4$ ist, so ist 3mal diese Zahl 5mal $^9/_4 = {}^{45}/_4$; 1mal die Zahl also der 3. Theil von $^{45}/_4 = {}^{45}/_{12}$ oder $^{15}/_4 = 3^3/_4$. Oder: $^1/_5$ von dem Dreifachen der zu suchenden Zahl ist $^9/_4$; $^1/_5$ von dem Einfachen dieser Zahl ist daher der 3. Theil von $^9/_4 = {}^9/_{12}$ oder $^3/_4$; 1mal die Zahl also ist 5mal $^9/_{12} = {}^{45}/_{12}$ oder 5mal $^3/_4 = {}^{15}/_4 = 3^3/_4$.

3. Berechnung. Dividire ich mit 3, statt mit $^3/_5$ in $^9/_4$, so wird mit einer 5mal so großen Zahl dividirt, als dieses geschehen sollte; ich muß also den erhaltenen Quotienten noch mit 5 vervielfachen. $3 : {}^9/_4 = {}^3/_4$; $5 \times {}^3/_4 = {}^{15}/_4 = 3^3/_4$.

Oder: Dividire ich mit 3, statt mit $^3/_5$, also mit einer 5mal so großen Zahl, so muß ich auch einen 5mal so großen Dividenden nehmen, wenn ich den wahren Quotienten erhalten will. Daher $5 \times {}^9/_4 = {}^{45}/_4$; $3 : {}^{45}/_4 = {}^{45}/_{12}$ oder ${}^{15}/_4 = 3^3/_4$.

4. Berechnung. $^9/_4$ durch $^3/_5$ dividiren heißt: eine Zahl suchen, die $^3/_5$mal genommen $^9/_4$ gibt. Diese Zahl ist also der 3. Theil $= {}^1/_3$ von $^9/_4$ 5mal genommen, d. i. $^5/_3$mal $^9/_4$; daher: $^3/_5 : {}^9/_4 = {}^5/_3 \times {}^9/_4 = {}^{45}/_{12} = 3^3/_4$.

Oder: $^3/_5 : {}^9/_4 = \frac{5}{3} \times \frac{\overset{3}{9}}{4} = \frac{15}{4} = 3^3/_4$.

$^9/_4$ dividirt durch $^3/_5$ gibt $3^3/_4$ zum Quotienten.

7. Division eines Bruches durch eine gemischte Zahl.

Beispiel: Dividire $^2/_3$ durch $1^4/_5$!

Die gemischte Zahl muß wieder in einen unächten Bruch aufgelös't werden. $1^4/_5 = {}^9/_5$.

Berechnung: $\frac{9}{5} : \frac{2}{3} = \left(\frac{9 \times 3}{5 \times 3}\right) : \left(\frac{2 \times 5}{3 \times 5}\right) = \frac{27}{15} : \frac{10}{15} = 27 : 10 = {}^{10}/_{27}$.

Oder: Es soll eine Zahl gesucht werden, von der $^9/_5$ genommen $^2/_3$ gibt. $^9/_5 = 9$mal $^1/_5$.

9mal $^1/_5$ der Zahl gibt $^2/_3$;
daher 9mal diese Zahl gibt 5mal $^2/_3 = {}^{10}/_3$;
1mal diese Zahl ist also der 9. Theil von ${}^{10}/_3 = {}^{10}/_{27}$.

Oder: $^1/_5$ vom 9fachen der Zahl ist $^2/_3$;

$^1/_5$ vom 1fachen dieser Zahl ist daher $\frac{2/3}{9} = {}^2/_{27}$;

folglich ist die Zahl selbst oder 1mal diese Zahl 5mal $^2/_{27} = {}^{10}/_{27}$.

Oder: $1^4/_5 : {}^2/_3 = {}^9/_5 : {}^2/_3 = {}^5/_9 \times {}^2/_3 = {}^{10}/_{27}$.

$^2/_3$ durch $1^4/_5$ dividirt gibt zum Quotienten $^{10}/_{27}$.

8. Division einer gemischten Zahl durch eine gemischte Zahl.

Beispiel: Dividire $5^3/_4$ durch $2^2/_3$!

Beide gemischte Zahlen werden in unächte Brüche aufgelös't, und dann sind die verschiedenen Arten der Berechnungen nach den vorhin zum 5. Falle gegebenen Erklärungen und Regeln auszuführen.

Berechnung: $2\frac{2}{3} : 5\frac{3}{4} = \frac{8}{3} : \frac{23}{4} = \left(\frac{8 \times 4}{3 \times 4}\right) : \left(\frac{23 \times 3}{4 \times 3}\right) = \frac{32}{12} : \frac{69}{12} = 32 : 69 = 2^5/_{32}$.

Oder: $2^2/_3 : 5^3/_4 = {}^8/_3 : {}^{23}/_4 = {}^3/_8 \times {}^{23}/_4 = {}^{69}/_{32} = 2^5/_{32}$.

Oder auch in den vorhergehenden Berechnungsweisen.

Uebungsaufgaben.

1. a) Dividire $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$, $^5/_6$, $^6/_7$, $^7/_8$ 2c. durch 2, 3, 4 u. 5 einzeln!
   b) Wie oft ist je 3, 2, 7, 5, 9 enthalten in $^7/_8$, $^3/_5$, $^8/_9$, $^7/_{10}$, $^5/_7$?
2. a) Dividire $2^2/_3$, $3^1/_5$, $4^3/_4$, $7^5/_6$, $9^6/_7$ durch 2, 4, 8, 3, 5!
   b) Wie oft ist in $3^1/_4$, $1^5/_8$, $2^5/_6$, $4^2/_5$, $15^2/_3$ — 6, 7, 9 u. 10 enthalten?
3. a) Dividire 1, 2, 3 bis 9 durch $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$, $^1/_4$, $^3/_4$, $^4/_5$, $^5/_9$!
   b) Wie oft ist $^3/_5$, $^5/_6$, $^5/_8$, $^4/_7$, $^7/_9$ in 1, 2, 5, 7, 8, 9, 10 enthalten?
4. a) Dividire 1, 2, 3 — 9 durch $1^1/_2$, $1^2/_3$, $2^3/_4$, $3^2/_5$, $5^5/_7$ u. $7^4/_9$!
   b) Wie oft ist $4^5/_6$ in 3, 9, 12, 17, 20, 27, 35 enthalten? wie oft $7^2/_5$ u. $9^3/_5$?
5. a) Wie oft ist $^1/_3$ in $^2/_3$, $^2/_5$ in $^4/_5$, $^3/_7$ in $^6/_7$, $^2/_9$ in $^8/_9$, $^3/_{11}$ in $^9/_{11}$ enthalten?
   b) Wie oft ist $^2/_5$ in $^3/_5$, $^3/_8$ in $^5/_8$, $^4/_9$ in $^7/_9$, $^5/_{12}$ in $^{11}/_{12}$, $^5/_7$ in $^4/_7$, $^7/_{12}$ in $^5/_{12}$ enthalten?
   c) Dividire $^{11}/_{12}$, $^7/_{12}$, $^5/_{12}$, $^{10}/_{12}$ durch $^7/_{12}$ und durch $^5/_{12}$! ebenso $^{19}/_{21}$, $^{17}/_{21}$, $^{16}/_{21}$, $^{13}/_{21}$, $^{12}/_{21}$, $^8/_{21}$, $^6/_{21}$ durch $^{11}/_{21}$!
   d) Dividire $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$, $^3/_4$, $^3/_5$, $^5/_6$ durch $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$, $^5/_6$, $^6/_7$, $^4/_7$ u. $^5/_8$?
   e) Wie oft ist $^3/_4$ in $^5/_8$, $^8/_5$, $^5/_7$, $^7/_5$, $^7/_9$, $^9/_7$, $^{11}/_{12}$, $^{12}/_{11}$ enthalten? und wie oft $^5/_6$?
6. a) Dividire $1^1/_2$ durch $^1/_2$, $2^1/_3$ durch $^2/_3$, $3^3/_4$ durch $^3/_4$, $4^5/_6$ durch $^5/_6$!
   b) Welche Quotienten erhält man, wenn man $2^2/_3$, $3^4/_5$, $5^3/_8$, $7^5/_6$, $9^3/_4$, $12^5/_7$ einzeln durch $^3/_4$, $^2/_3$ und $^4/_5$ dividirt?
   c) Wie oft sind $^5/_7$, $^7/_8$ und $^4/_9$ in $8^2/_3$, $10^4/_5$, $13^1/_2$, $15^3/_4$ und $20^5/_6$ enthalten?
7. a) Wie oft ist $1^1/_2$, $1^2/_3$, $2^3/_4$, $5^2/_5$ in $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$, $^3/_5$, $^4/_7$, $^5/_9$ enthalten?
   b) Welche Quotienten erhält man, wenn man $^5/_6$, $^3/_8$, $^7/_{10}$, $^7/_{15}$, $^2/_{15}$, $^{13}/_{15}$, $^{15}/_{20}$ durch $1^2/_3$, $2^1/_4$ und $3^4/_5$ dividirt?
8. a) Wie oft ist $2^1/_2$ in $7^1/_2$, $3^1/_3$ in $13^1/_3$, $1^1/_2$ in $2^2/_3$, $2^1/_4$ in $5^3/_5$, $4^5/_6$ in $2^1/_6$, $5^1/_3$ in $3^1/_4$, $3^4/_5$ in $5^4/_9$, $4^3/_7$ in $13^1/_2$ enthalten?
   b) Wie oft kann man $7^1/_5$ von $2^1/_4$, $5^3/_5$, $6^1/_6$, $9^4/_7$, $14^2/_3$, $20^3/_4$, $21^5/_8$ hinwegnehmen? wie oft aber $5^5/_9$? —

a) Mündliche Uebungen.

In angewandten Zahlen.

Wir zeigen hier theilweise noch einen andern Weg im Dividiren der Brüche, der namentlich in Elementarschulen vielleicht vorzuziehen wäre und dem Dividiren der Brüche mit unbenannten Zahlen vorangehen dürfte, weil es für solche Schüler der leichter faßliche und nicht weniger gründliche Weg ist, von concreten (benannten) zu abstrakten (reinen) Zahlen überzugehen. Die Behandlung in reinen Bruchzahlen tritt sodann um so klarer, einleuchtender und einsichtlicher hervor, so, daß die verschiedenen Arten der Berechnungen, wie sie vorhergehend bei der Division unbenannter Brüche gelehrt worden sind, mit viel geringerer Schwierigkeit zum gründlichen und deutlichen Bewußtsein der Schüler gebracht werden können. — Die verschiedenen Fälle, die bei der Division der Brüche vorkommen können, lassen wir wieder aufeinander folgen, wie vorher.

1. Division eines Bruches durch eine ganze Zahl.

1. Beispiel: Wenn 2 Personen unter sich $^1/_2$ fl. zu theilen haben; wie viel erhält Eine Person?

Berechnung: Wenn 2 Personen unter sich $^1/_2$ fl. zu theilen haben, so muß derselbe in 2 gleiche Theile getheilt werden, und es bekommt jede Person die Hälfte oder den halben Theil von dem halben Gulden. Der ganze Gulden hat zwei halbe Gulden; theilt man einen halben Gulden in 2 gleiche Theile, so gibt der ganze Gulden 2mal 2 Theile oder 4 Theile, und jeder Theil heißt $^1/_4$ Gulden. Die Hälfte oder der halbe Theil von einem halben ist $^1/_4$ des ganzen Guldens; sonach erhält

jede Person $^1/_4$ Gulden. — Die Richtigkeit dieser Berechnung läßt sich auch in folgender Art nachweisen: 1 fl. = 60 kr.; $^1/_2$ fl. = 30 kr. Der halbe Theil oder die Hälfte von 30 kr. = 15 kr.; 15 kr. = $^1/_4$ fl.

Dieses Beispiel auf reine Zahlen übergetragen heißt: Dividire $^1/_2$ durch 2! Die Berechnungen, Erklärungen und Regeln, wie sie oben bei den mündlichen Uebungen in unbenannten Zahlen gegeben worden sind, mögen jetzt nun folgen. — Dieses gilt für alle Beispiele der folgenden Fälle.

Auf Grund vorangehender Berechnung ist die Hälfte oder der halbe Theil von $^1/_3$ fl. = $^1/_6$ fl.; von $^1/_4$ fl. = $^1/_8$ fl.; von $^1/_5$ fl. = $^1/_{10}$ fl. u. s. w.

2. Beispiel: Wenn 3 Ellen Seidenband $^4/_5$ fl. gelten; wie theuer ist dann 1 Elle Seidenband?

Berechnung: Wenn 3 Ellen $^4/_5$ fl. gelten, so muß 1 Elle den 3. Theil von $^4/_5$ fl. gelten, weil 1 Elle auch nur der 3. Theil von 3 Ellen ist. Wir suchen nun zuerst den 3. Theil von $^1/_5$ fl.! Wir haben also $^1/_5$ fl. in 3 gleiche Theile zu theilen. Wird $^1/_5$ fl. in 3 gleiche Theile getheilt, so gibt ein ganzer Gulden oder 5 Fünftel-Gulden 5mal 3 = 15 solche Theile, und jeder dieser Theile heißt $^1/_{15}$ fl.; der 3. Theil von $^1/_5$ fl. ist also $^1/_{15}$ fl. des ganzen Guldens. Ist der 3. Theil von $^1/_5$ fl. $^1/_{15}$ fl., so ist der 3. Theil von $^4/_5$ fl. 4mal $^1/_{15}$ fl. = $^4/_{15}$ fl. 1 Elle gilt somit $^4/_{15}$ fl. — Ein anderer Beweis: $^4/_5$ fl. = 48 kr.; der 3. Theil von 48 kr. = 16 kr. Oder: $^1/_5$ fl. = 12 kr.; der 3. Theil von 12 kr. = 4 kr. = $^1/_{15}$ fl.; 4mal 4 kr. = 16 kr. = $^4/_{15}$ fl.

Ebenso ist der 3. Theil von $^3/_4$ fl. = $^3/_{12}$ = $^1/_4$ fl.; von $^5/_6$ fl. = $^5/_{18}$ fl.; von $^7/_8$ fl. = $^7/_{24}$ fl. 2c.; der 4. Theil von $^5/_6$ fl. = $^5/_{24}$ fl. 2c. In reinen Zahlen heißt obiges Beispiel: Dividire $^4/_5$ durch 3!

Der Lehrer kann hier die Schüler schon darauf aufmerksam machen, wenn sie nicht von selbst darauf kommen sollten, daß diese Form der Division eines Bruches durch eine ganze Zahl mit der Multiplikationsform: $^1/_2 \times {}^1/_2, {}^1/_3, {}^1/_4$ 2c.; $^1/_2 \times {}^2/_3, {}^3/_4, {}^4/_5, {}^7/_9$ 2c.; $^1/_5 \times {}^3/_4, {}^5/_6, {}^7/_8, {}^9/_{16}$ 2c. 2c. übereinstimme.

2. Division einer gemischten Zahl durch eine ganze Zahl.

1. Beispiel: 4 Personen haben unter sich $2^2/_3$ fl. zu theilen; wie viel bekommt 1 Person?

Berechnung: Wenn 4 Personen $2^2/_3$ fl. unter sich zu theilen haben, so muß Eine Person den 4. Theil von $2^2/_3$ fl. bekommen. Der 4. Theil von 1 fl. = $^1/_4$ fl., von 2 fl. also 2mal $^1/_4$ fl. = $^2/_4$ fl.; der 4. Theil von $^1/_3$ fl. beträgt auf Grund der vorigen Beispiele $^1/_{12}$ fl.; von $^2/_3$ fl. 2mal $^1/_{15}$ fl. = $^2/_{12}$. Jede Person erhält also $^2/_4$ fl. und $^2/_{12}$ fl. = $^6/_{12} + {}^2/_{12}$ fl. = $^8/_{12}$ fl. = $^2/_3$ fl. — Oder: Wir lösen die gemischte Zahl in einen unächten Bruch auf (richten die gemischte Zahl ein), nämlich $2^2/_3$ fl. = $^8/_3$ fl. Jede Person erhält den 4. Theil von $^8/_3$ fl.; da der 4. Theil von $^1/_3$ fl. $^1/_{12}$ fl. ist, so ist der 4. Theil von $^8/_3$ fl. 8mal $^1/_{12}$ fl. = $^8/_{12}$ fl. oder $^2/_3$ fl. Oder: Der 4. Theil von 8 fl. ist 2 fl.; der 4. Theil daher von $^8/_3$ fl. ist $^2/_3$ fl. — Ein weiterer Beweis: Der 4. Theil von 1 fl. = 60 kr. ist 15 kr.; von 2 fl. 2mal 15 kr. = 30 kr.; $^2/_3$ fl. = 40 kr.; der 4. Theil von 40 kr. = 10 kr.; zusammen also

(30 kr. + 10 =) 40 kr.; 40 kr. aber = $^{40}/_{60}$ = $^{4}/_{6}$ = $^{2}/_{3}$ fl. — In reinen Zahlen heißt die Aufgabe: Dividire $2^{2}/_{3}$ fl. durch 4!

2. Beispiel: Wenn man 5 Pfund Tabak um $7^{5}/_{6}$ fl. kauft; wie hoch kommt 1 Pfund zu stehen?

Berechnung: Wenn 5 ℔ $7^{5}/_{6}$ fl. gelten, so gilt 1 ℔ den 5. Theil von $7^{5}/_{6}$ fl., weil 1 ℔ der 5. Theil von 5 ℔ ist. Der 5. Theil von 7 fl. = $^{7}/_{5}$ fl. = $1^{2}/_{5}$ fl.; der 5. Theil von $^{1}/_{6}$ fl. = $^{1}/_{30}$ fl., von $^{5}/_{6}$ fl. 5mal $^{1}/_{30}$ fl. = $^{5}/_{30}$ fl.; $1^{2}/_{5}$ fl. + $^{5}/_{30}$ fl. = $1^{12}/_{30}$ fl. + $^{5}/_{30}$ fl. = $1^{17}/_{30}$ fl. gilt 1 ℔. Oder: $7^{5}/_{6}$ fl. = $^{47}/_{6}$ fl. Der 5. Theil von $^{1}/_{6}$ fl. = $^{1}/_{30}$ fl.; der 5. Theil von $^{47}/_{6}$ fl. = 47mal $^{1}/_{30}$ fl. = $^{47}/_{30}$ fl. = $1^{17}/_{30}$ fl. — Weiterer Beweis: Der 5. Theil von 1 fl. oder 60 kr. = 12 kr.; der 5. Theil von 7 fl. = 7mal 12 kr. = 1 fl. 24 kr. = $1^{2}/_{5}$ fl.; der 5. Theil von $^{5}/_{6}$ fl. oder 50 kr. = 10 kr. = $^{1}/_{6}$ fl.; zusammen (1 fl. 24 kr. + 10 kr. =) 1 fl. 34 kr. oder $1^{17}/_{30}$ fl. — In reinen Zahlen: Dividire $7^{5}/_{6}$ durch 5!

3. Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch.

1. Beispiel: Wenn $^{3}/_{5}$ Ellen Zeug 27 kr. gelten, wie hoch kommt sodann 1 Elle?

Berechnung: Wir untersuchen hier zuerst, was $^{1}/_{5}$ Elle gilt. $^{3}/_{5}$ Ellen = 3mal $^{1}/_{5}$ Elle; $^{1}/_{5}$ Elle ist also der 3. Theil von $^{3}/_{5}$ Ellen und kostet demnach auch den 3. Theil von 27 kr. Der 3. Theil von 1 kr. = $^{1}/_{3}$ kr.; der 3. Theil von 27 kr. = $^{27}/_{3}$ kr. = 9 kr. 1 ganze Elle hat 5 Fünftel-Ellen, also 5mal $^{1}/_{5}$ Elle, folglich kostet die ganze Elle 5mal 9 kr. = 45 kr. Fassen wir das Gesagte kurz zusammen, so können wir dieses so ausdrücken: wenn $^{3}/_{5}$ Ellen 27 kr. gelten, so gilt 1 Elle den 3. Theil von 27 kr. 5mal genommen; oder: 1 Elle gilt 5mal den 3. Theil von 27 kr., d. i. $^{5}/_{3}$mal 27 kr. = 45 kr. Nach dieser Ansicht verwandelt sich also die Division in eine Multiplikation, indem der Divisor umgekehrt wird. — In reinen Zahlen heißt die Aufgabe: Dividire 27 durch $^{3}/_{5}$!

2. Beispiel: Wenn $^{4}/_{9}$ ℔ Tabak 38 kr. gelten, wie hoch kommt das Pfund zu stehen?

Berechnung: $^{4}/_{9}$ ℔ = 4mal $^{1}/_{9}$ ℔. Kosten $^{4}/_{9}$ ℔ 38 kr., so muß $^{1}/_{9}$ ℔ den 4. Theil von 38 kr. kosten, weil $^{1}/_{9}$ ℔ der 4. Theil von $^{4}/_{9}$ ℔ ist. Der 4. Theil von 38 kr. = $9^{2}/_{4}$ = $9^{1}/_{2}$ kr. Da nun das ganze Pfund $^{9}/_{9}$ ℔, also 9mal $^{1}/_{9}$ ℔ hat, so kostet es auch 9mal $9^{1}/_{2}$ kr. 9 × 9 kr. = 81 kr. = 1 fl. 21 kr.; 9 × $^{1}/_{2}$ kr. = $4^{1}/_{2}$ kr.; 1 ℔ kostet also 1 fl. 21 kr. und $4^{1}/_{2}$ kr. = 1 fl. $25^{1}/_{2}$ kr. Kürzer ausgedrückt: 1 ℔ gilt den 4. Theil von 38 kr. 9mal genommen, oder: 9mal den 4. Theil von 38 kr., d. i. $^{9}/_{4}$mal 38 kr. = 1 fl. $25^{1}/_{2}$ kr. (Multiplikation bei Umkehrung des Divisors.) — In reinen Zahlen: Dividire 38 durch $^{4}/_{9}$!

4. Division einer ganzen Zahl durch eine gemischte Zahl.

1. Beispiel: Wenn $2^{1}/_{2}$ ℔ einer Waare 50 kr. gelten; was gilt dann 1 ℔ dieser Waare?

Berechnung: Hier müssen wir zuerst untersuchen, was ein halbes Pfund der Waare gilt. $^{1}/_{2}$ ℔ gilt den so vielsten Theil von 50 kr., als $2^{1}/_{2}$ ℔ halbe Pfund sind. $2^{1}/_{2}$ ℔ = $^{5}/_{2}$ ℔; ein halbes Pfund gilt also

den 5. Theil von 50 kr. = 10 kr., weil $^1/_2$ ℔ der 5. Theil von $2^1/_2$ ℔ = $^5/_2$ ℔ ist. Ein ganzes Pfund hat 2 halbe Pfund, daher gilt 1 ℔ 2 mal 10 kr. = 20 kr. Kürzer: 1 ℔ gilt den 5. Theil von 50 kr. 2mal genommen, oder: 2mal den 5. Theil von 50 kr., d. i. $^2/_5$mal 50 kr. = 20 kr. — (Also wieder Multiplikation bei Umkehrung des Divisors.) — In reinen Zahlen: Dividire 50 durch $2^1/_2$!

2. Beispiel: Wenn $3^1/_5$ Ellen Tuch 13 fl. gelten; wie theuer ist 1 Elle?

Berechnung: Zuerst müssen wir wieder suchen, was eine Fünftel-Elle gilt. $3^1/_5$ Ellen = $^{16}/_5$ Ellen; 1 Fünftel-Elle ist der 16. Theil von 16 Fünftel-Ellen, daher gilt 1 Fünftel-Elle auch den 16. Theil von 13 fl. = $^{13}/_{16}$ fl. 1 Elle = 5 Fünftel-Ellen, daher gilt 1 Elle 5mal $^{13}/_{16}$ fl. = $^{65}/_{16}$ fl. = $4^1/_{16}$ fl. Kürzer ausgedrückt: 1 Elle gilt den 16. Theil von 13 fl. 5mal genommen, oder: 5mal den 16. Theil von 13 fl., d. i. $^5/_{16}$ mal 13 fl. = $4^1/_{16}$ fl. — In reinen Zahlen: Dividire 13 durch $3^1/_5$!

5. Division eines Bruches durch einen Bruch!

1. Beispiel: Wenn $^1/_4$ ℔ Tabak $^1/_2$ fl. kostet; wie hoch kommt dann 1 ℔?

Berechnung: Wenn 1 Viertel-Pfund $^1/_2$ fl. gilt, so muß ein ganzes Pfund so oftmal $^1/_2$ fl. gelten, als das ganze Pfund Viertelpfund hat; 1 ℔ = 4mal $^1/_4$ ℔, folglich kostet 1 ℔ 4mal $^1/_2$ fl. = $^4/_2$ fl. = 2 fl. — In reinen Zahlen heißt diese Aufgabe: Dividire $^1/_2$ durch $^1/_4$! (Wird $^1/_2$ durch 1 dividirt, so erhält man zum Quotienten $^1/_2$; denn 1 ist in $^1/_2$ nur $^1/_2$mal enthalten. Nun soll aber nicht mit 1, sondern mit $^1/_4$, d. i. mit dem 4. Theil von 1, also mit einer 4mal so kleinen Zahl dividirt werden; je kleiner aber der Divisor ist, desto größer wird der Quotient; deßwegen haben wir den durch Division mit 1 erhaltenen Quotienten 4mal zu nehmen, also 4mal $^1/_2$ = 2.)

2. Beispiel: Wenn $^1/_3$ ℔ $^5/_8$ fl. gilt; wie hoch kommt 1 ℔?

Berechnung: 1 ℔ = 3 Drittelpfd.; 1 ℔ kostet also 3mal $^5/_8$ fl. = $^{15}/_8$ fl. = $1^7/_8$ fl. — In reinen Zahlen: Dividire $^5/_8$ durch $^1/_3$! ($^5/_8$ dividirt durch 1 = $^5/_8$; es soll aber nur mit $^1/_3$, also mit einer 3mal so kleinen Zahl dividirt werden, und daher ist der Quotient $^5/_8$ mit 3 zu multipliziren, also 3mal $^5/_8$ = $^{15}/_8$ = $1^7/_8$.)

3. Beispiel: Wenn $^3/_8$ ℔ $^5/_8$ fl. gelten, was hat man dann für 1 ℔ zu bezahlen?

Berechnung: Hier haben wir wieder zu untersuchen, was 1 Achtel-Pfund kostet. $^3/_8$ ℔ = 3mal $^1/_8$ ℔; $^1/_8$ ℔ ist also der 3. Theil von $^3/_8$ ℔, folglich kostet $^1/_8$ ℔ den 3. Theil von $^5/_8$ fl. Der 3. Theil von $^1/_8$ fl. ist $^1/_{24}$ fl.; der 3. Theil von 5 Achtel-Gulden 5mal $^1/_{24}$ fl. = $^5/_{24}$ fl. $^1/_8$ ℔ kostet also $^5/_{24}$ fl., und da 1 ganzes Pfund 8 Achtel-Pfund hat, so kostet es 8mal $^5/_{24}$ fl. = $^{40}/_{24}$ fl. = $1^{16}/_{24}$ fl. = $1^2/_3$ fl. Dieses kürzer ausgedrückt heißt: 1 ℔ gilt den 3. Theil von $^5/_8$ fl. 8mal genommen, oder: 8mal den 3. Theil von $^5/_8$ fl., d. i. $^8/_3$mal $^5/_8$ fl. = $^{40}/_{24}$ fl. = $^5/_3$ fl. = $1^2/_3$ fl. (So verwandelt sich also auch hier wieder die Division in eine Multiplikation durch Umkehrung des Divisors.) — In reinen Zahlen heißt die Aufgabe: Dividire $^5/_8$ durch $^3/_8$!

4. Beispiel: Wenn $^4/_5$ Metzen Haber $^3/_4$ fl. gelten; wie hoch kommt 1 Metzen?

Berechnung: Zuerst muß gesucht werden, was 1 Fünftel-Metzen kostet. $^4/_5$ Metzen sind 4mal 1 Fünftel-Metzen. $^1/_5$ Metzen ist der 4. Theil von $^4/_5$ Metzen, daher gilt $^1/_5$ Mtz. auch nur den 4. Theil von $^3/_4$ fl. Der 4. Theil von $^1/_4$ fl. ist aus den schon mehrmal entwickelten Gründen $^1/_{16}$ fl.; der 4. Theil von $^3/_4$ fl. $=$ $^3/_{16}$ fl. Da nun 1 Fünftel-Metzen $^3/_{16}$ fl. gilt, so gilt der ganze Metzen ($=$ 5 Fünftel-Metzen) 5mal $^3/_{16}$ fl. $=$ $^{15}/_{16}$ fl. Kürzer: 1 Metzen gilt den 4. Theil von $^3/_4$ fl. 5mal genommen, oder: 5mal den 4. Theil von $^3/_4$ fl., d. i. $^5/_4 \times {}^3/_4$ fl. $= {}^{15}/_{16}$ fl. — In reinen Zahlen: Dividire $^3/_4$ durch $^4/_5$!

Dieser Fall der Division eines Bruches durch einen andern Bruch bildet die Grundlage für die drei folgenden — und überhaupt für die Division der Brüche, weßhalb darauf viel Fleiß zu verwenden ist; und man thut sehr wohl, Aufgaben mit Brüchen in benannten und unbenannten Zahlen auf so mannigfaltige, wenn auch umständliche Weise auflösen zu lassen, wie wir es gethan. Es hält überhaupt schwer, die Schüler in das Wesen der Brüche einzuführen, so, daß sie wirklich mit Klarheit und Bestimmtheit sich der Gründe bei dem Rechenverfahren deutlich bewußt werden. Im Selbstdenken ungeübte Schüler begnügen sich nur gar zu gern mit dem Mechanismus, und freuen sich, irgend eine Regel, wie z. B. „Mit einem Bruche dividiren, heißt: mit dem umgekehrten Bruche multipliziren," gefunden zu haben, unbekümmert um die Gründe dieses Verfahrens. Darum fordere man allenthalben ausführliche Erklärungen und genaueste Nachweisungen aller vorzunehmenden Operationen, um die Schüler gleichsam zum Denken und Begründen zu nöthigen.

6. Division einer gemischten Zahl durch einen Bruch.

1. Beispiel: Wenn $^3/_4$ Ellen $2^2/_5$ fl. gelten; wie hoch kommt 1 Elle?

Berechnung: Wir haben vorerst zu untersuchen, was 1 Viertel-Elle kostet. $^3/_4$ Ellen $=$ 3mal 1 Viertel-Elle; $^1/_4$ Elle ist daher der 3. Theil von $^3/_4$ Ellen und kostet demnach auch den 3. Theil von $2^2/_5$ fl. Der 3. Theil von 2 fl. $=$ $^2/_3$ fl.; der 3. Theil von $^2/_5$ fl. $=$ 2mal $^1/_{15}$ fl. $=$ $^2/_{15}$ fl. $^1/_3$ Elle kostet also $^2/_3$ fl. $+$ $^2/_{15}$ fl. $=$ $^{10}/_{15}$ fl. $+$ $^2/_{15}$ fl. $=$ $^{12}/_{15}$ fl. $=$ $^4/_5$ fl. 1 Elle $=$ 4 Viertel-Ellen, folglich kostet 1 Elle 4mal $^4/_5$ fl. $=$ $^{16}/_5$ fl. $=$ $3^1/_5$ fl. Oder: Lösen wir die gemischte Zahl in einen unächten Bruch auf, so ist die Berechnung dieselbe, wie bei dem 3. und 4. Beispiele des vorhergehenden 5. Falles gezeigt wurde, nämlich: $2^2/_5$ fl. $=$ $^{12}/_5$ fl. Gelten $^3/_4$ Ellen $^{12}/_5$ fl., so gilt 1 Viertel-Elle den 3. Theil von $^{12}/_5$ fl. Der 3. Theil von $^1/_5$ fl. $=$ $^1/_{15}$ fl.; der 3. Theil von $^{12}/_5$ fl. $=$ 12mal $^1/_{15}$ fl. $=$ $^{12}/_{15}$ fl. $=$ $^4/_5$ fl. 1 Elle ($=$ $^4/_4$ Elle) gilt also 4mal $^4/_5$ fl. $=$ $^{16}/_5$ fl. $=$ $3^1/_5$ fl. Dieses kürzer ausgedrückt: 1 Elle gilt den 3. Theil von $2^2/_5$ fl. ($=$ von $^{12}/_5$ fl.) 4mal genommen, oder: 4mal den 3. Theil von $^{12}/_5$ fl., d. i. $^4/_3 \times {}^{12}/_5$ fl. $=$ $^{48}/_{15}$ $=$ $^{16}/_5$ fl. $=$ $3^1/_5$ fl. — In reinen Zahlen: Dividire $2^2/_5$ durch $^3/_4$!

7. Division eines Bruches durch eine gemischte Zahl.

Beispiel: Wenn $2^1/_3$ Loth Gewürz $^3/_5$ fl. gelten; wie theuer ist dann 1 Loth?

Berechnung: Wir müssen zuerst wieder suchen, was 1 Drittel-Loth gilt. $2^1/_3$ Loth $=$ $^7/_3$ Lth. Wenn 7 Drittel-Loth $^3/_5$ fl. gelten, so kostet 1 Drittel-Loth den 7. Theil von $^3/_5$ fl. $=$ $^3/_{35}$ fl., und da das ganze Loth 3 Drittel-

Loth hat, so gilt 1 Loth 3mal $^3/_{35}$ fl. = $^9/_{35}$ fl. — Kürzer: 1 Loth gilt den 7. Theil von $^3/_5$ fl. 3mal genommen, oder: 3mal den 7. Theil von $^3/_5$ fl., d. i. $^3/_7 \times {}^3/_5$ fl. = $^9/_{35}$ fl. — In reinen Zahlen: Dividire $^3/_5$ durch $2^1/_3$!

8. Division einer gemischten Zahl durch eine gemischte Zahl.

Beispiel: Wenn $2^1/_4$ Ellen Tuch um $7^4/_5$ fl. gekauft werden, wie hoch kommt dann 1 Elle zu stehen?

Berechnung: Wir müssen vorerst untersuchen, was 1 Viertel Elle gilt. $^1/_4$ Elle gilt den so vielsten Theil von $7^4/_5$ fl., als $2^1/_4$ Ellen Viertel-Ellen sind; $2^1/_4$ Ellen = $^9/_4$ Ellen. Wenn 9 Viertel-Ellen $7^4/_5$ fl. gelten, so gilt 1 Viertel-Elle den 9. Theil von $7^4/_5$ fl., weil 1 Viertel-Elle der 9. Theil ist von 9 Viertel-Ellen. Der 9. Theil von 7 fl. = $^7/_9$ fl.; der 9. Theil von $^4/_5$ fl. = $^4/_{45}$ fl.; denn der 9. Theil von $^1/_5$ fl. = $^1/_{45}$ fl. $^1/_4$ Elle kostet also $^7/_9$ fl. + $^4/_{45}$ fl. = $^{35}/_{45}$ fl. + $^4/_{45}$ = $^{39}/_{45}$ fl. = $^{13}/_{15}$ fl. Kostet $^1/_4$ Elle $^{13}/_{15}$ fl., so gilt die ganze Elle (= 4mal $^1/_4$ Elle) 4mal $^{13}/_{15}$ fl. = $^{52}/_{15}$ fl. = $3^7/_{15}$ fl. Löset man beide gemischte Zahlen in unächte Brüche auf, also $2^1/_4$ Ellen = $^9/_4$ Ellen, und $7^4/_5$ fl. = $^{39}/_5$ fl., so heißt die Aufgabe: „Wenn $^9/_4$ Ellen $^{39}/_5$ fl. gelten, wie hoch kommt 1 Elle?" und die Berechnung wird sodann auf dieselbe Weise ausgeführt, wie wenn ein Bruch durch einen Bruch zu dividiren ist. Also: Gelten 9 Viertel-Ell. $^{39}/_5$ fl., so gilt 1 Viertel-Elle den 9. Theil von $^{39}/_5$ fl.; der 9. Theil von $^1/_5$ fl. = $^1/_{45}$ fl. (wie oben), daher der 9. Theil von $^{39}/_5$ fl. 39mal $^1/_{45}$ fl. = $^{39}/_{45}$ fl. = $^{13}/_{15}$ fl. Gilt 1 Viertel-Elle $^{13}/_{15}$ fl., so muß die ganze Elle 4mal $^{13}/_{15}$ fl. = $^{52}/_{15}$ fl. = $3^7/_{15}$ fl. gelten. Dieses können wir wieder kürzer so ausdrücken: Wenn $2^1/_4$ Elle (= $^9/_4$ Ellen) $7^4/_5$ fl. (= $^{39}/_5$ fl.) gelten, so gilt 1 Elle den 9. Theil von $7^4/_5$ fl. = von $^{39}/_5$ fl. 4mal genommen, oder: 1 Elle gilt 4mal den 9. Theil von $^{39}/_5$ fl., d. i. $^4/_9 \times {}^{39}/_5$ fl. = $^{156}/_{45}$ fl. = $^{52}/_{15}$ fl. = $3^7/_{15}$ fl. — In reinen Zahlen ausgedrückt heißt das Beispiel: Dividire $7^4/_5$ durch $2^1/_4$!

Angedeutet möge hier noch sein, wie eine Divisionsaufgabe mit benannten Zahlen nach dem Begriffe des Enthaltenseins aufgefaßt werden muß, und wie jede eigentliche Divisionsaufgabe darnach behandelt werden kann.

Wie oft $2^1/_4$ Ellen in $7^4/_5$ fl. enthalten sind, kann nicht gefragt werden, denn Ellen sind in Gulden nicht enthalten; man muß der Sache daher eine andere Wendung geben. Wir denken uns die Aufgabe so: Kosten $2^1/_4$ Ellen $7^4/_5$ fl., so muß der Preis von 1 Elle $2^1/_4$mal in $7^4/_5$ fl. enthalten sein; denn $7^4/_5$ fl. ist das Produkt aus $2^1/_4$mal des Preises von 1 Elle; $2^1/_4$ ist also der eine, bekannte Faktor, und der Preis von 1 Elle der andere, unbekannte Faktor des Produktes $7^4/_5$. Aus dem Produkte und dem einen Faktor findet man den andern Faktor, wenn man untersucht, wie vielmal man den gegebenen Faktor nehmen muß, um das Produkt zu erhalten, d. h. wenn man untersucht, wie oft er im Produkte enthalten ist. Man hat also zu untersuchen, wie oft $2^1/_4$ in $7^4/_5$ enthalten ist, oder man hat mit $2^1/_4$ in $7^4/_5$ zu dividiren; der Quotient gibt die Zahl der Gulden als Preis von einer Elle. —

Die Division angewendet auf die Reduktion untergeordneter Größen in übergeordnete Größen.

Wie durch Multiplikation untergeordnete Größen in übergeordnete zurückgeführt werden, ist S. 105 ff. und S. 117 ff. gezeigt worden. Wir wollen nun noch zeigen, wie dieses Reduziren auch durch die Division bewerkstelligt werden kann. Es gibt hier mehre Fälle, die in nachfolgenden Beispielen erläutert werden sollen.

1. Beispiel. 35 kr., wie viel Gulden?

Berechnung: Zu 1 fl. braucht man 60 kr.; so oft man 60 kr. hat, so oft erhält man 1 fl.; also: so oft 60 kr. in 35 kr. enthalten ist, so viel Gulden sind es, und dieses findet man durch Division; daher 60:35 $= {}^{35}/_{60}$ fl. Dieser Bruch noch durch 5 gekürzt, nämlich $^{5)}{}^{35}/_{60} = {}^{7}/_{12}$ fl.

Antwort 35 kr. geben $^{35}/_{60}$ fl. oder $^{7}/_{12}$ fl.

Regel. Ist eine einfache Größe zu reduziren, so gibt man dieser (hier 35 kr.) die Reduktions- (hier Währungs-) Zahl zum Nenner und kürzt den erhaltenen Bruch, wenn solches angeht.

2. Beispiel. 78 Quint, wie viel Loth?

Berechnung: Man braucht 4 Quint zu 1 Loth. $4:78 = {}^{78}/_{4} = 19^{2}/_{4} = 19^{1}/_{2}$ Lth. Antw. 78 Qnt. machen $9^{1}/_{2}$ Lth. (Gilt dieselbe Regel. Ergibt sich ein unächter od. uneigentlicher Bruch, so werden die Ganzen herausgezogen.)

3. Beispiel. $67^{1}/_{2}$ Bogen Papier, wie viel Buch?

1. Berechnung: 24 Bogen geben 1 Buch. $24:67^{1}/_{2} = \frac{67^{1}/_{2}}{24} = \frac{135}{48} = 2\frac{39}{48} = 2^{13}/_{16}$ Buch. Antw. $67^{1}/_{2}$ Bogen geben $2^{13}/_{16}$ Buch.

2. Berechnung: Man löse die gegebene gemischte Zahl in einen unächten Bruch auf und dividire in diesen mit der Reduktionszahl. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl dividirt, indem man mit dieser den Nenner des Bruches multiplizirt. Also: $24:67^{1}/_{2} = \frac{135}{2 \times 24} = {}^{135}/_{48} = 2^{35}/_{48} = 2^{13}/_{16}$ Buch.

Regel. Ist eine gemischte Zahl zurückzuführen, so dividirt man, wie vorher, mit der Reduktionszahl in die Zahl der gegebenen Größe, indem man dieser die Reduktionszahl zum Nenner gibt, wodurch aber ein Doppelbruch entsteht, der dann in einen einfachen Bruch aufgelöſ't wird. Oder: Man löset die gemischte Zahl auf und multiplizirt ihren Nenner mit der Reduktionszahl.

4. Beispiel. 75 Dreißiger, wie viel Schäffel?

1. Berechnung. (Wir führen die Dreißiger zuerst in die nächste übergeordnete Größe — in Metzen — und dann die Metzen in Schäffel zurück.) 32 Drßgr. = 1 Metz. $32:75 = {}^{75}/_{32} = 2^{11}/_{32}$ Mtz. — 6 Mtz. = 1 Schfl. — $6:2^{11}/_{32} = \frac{2^{11}/_{32}}{6} = {}^{75}/_{192} = {}^{25}/_{64}$ Schfl. Oder: $6:2^{11}/_{32} = \frac{75}{32 \times 6} = {}^{75}/_{192} = {}^{25}/_{64}$ Schfl. —

Antwort: 75 Drßgr. geben $^{25}/_{64}$ Schfl.

2. Berechnung: Da man zu einem Schfl. 6 Mtz. und zu 1 Mtz. 32 Drßgr. braucht, so haben wir mit 32 und mit 6, also mit 6×32 zu dividiren; daher $(6 \times 32):75 = \frac{75}{6 \times 32} = {}^{75}/_{192} = {}^{25}/_{64}$ Schfl. Oder: $6 \times 32 = 192$, d. i. 192 Drßgr. braucht man zu 1 Schfl., und man hat daher mit 192 in 75 Dßg. zu dividiren; $192:75 = {}^{75}/_{192} = {}^{25}/_{64}$ Schfl.

Regel. Ist eine untergeordnete Größe in eine entfernte höhere zu reduziren, so führe man die gegebene untergeordnete Größe zuerst in die nächst höhere zurück, diese dann weiter; oder man führe die untergeordnete Größe gleich in die verlangte übergeordnete zurück, indem man mit den erforderlichen Reduktionszahlen oder auch mit dem Produkte aus denselben

dividirt, d. h. diese Reduktionszahlen oder auch derer Produkt der untergeordneten Größezahl zum Nenner gibt.

5. Beispiel. 5 Rieß 13 Buch 8 Bogen Papier, wie viel Ballen?

Da in diesem Beispiele mehre gleichartige, ungleichnamige Größen in eine übergeordnete reduzirt werden sollen: so kann dieses auf zweierlei Wegen geschehen, nämlich man kann die einzelnen untergeordneten Größen immer in die nächste übergeordnete zurückführen; oder man löset die gegebenen übergeordneten Größen in die kleinste Benennung der untergeordneten auf, und verfährt dann wie zum 4. Beispiel bei der 2. Berechnung.

1. Berechnung. 8 Bog. $=24:8={}^{8}/_{24}={}^{1}/_{3}$ Buch. — 13 Buch $+$ $^{1}/_{3}$ Bch. $=13^{1}/_{3}$ Bch. — $20:13^{1}/_{3}=\frac{13^{1}/_{3}}{20}={}^{40}/_{60}={}^{4}/_{6}={}^{2}/_{3}$ Rieß; oder $20:13^{1}/_{3}=\frac{40}{3\times 20}={}^{40}/_{60}={}^{2}/_{3}$ Rß. — 5 Rß. $+{}^{2}/_{3}$ Rß. $=5^{2}/_{3}$ Rß. — $10:5^{2}/_{3}=\frac{5^{2}/_{3}}{10}={}^{17}/_{30}$ Ballen; oder: $10:5^{2}/_{3}=\frac{17}{3\times 10}={}^{17}/_{30}$ Ballen.

Antwort: 5 Rieß 13 Buch 8 Bogen sind $^{17}/_{30}$ Ballen.

2. Berechnung: 5 Rß. à 20 Bch. $=100$ Bch.; 100 Bch. $+$ 13 Bch. $=$ 113 Bch.; — 113 Bch. à 24 Bg. $=2712$ Bg.; 2712 Bg. $+8$ Bg. $=2720$ Bg. — 1 Bal. $=10\times 20\times 24=4800$ Bog. Daher 2720 Bog. $=\frac{2720}{10\times 20\times 24}={}^{2720}/_{4800}={}^{17}/_{30}$ Bal.; oder: 2720 Bg. $={}^{2720}/_{4800}={}^{17}/_{30}$ Bal.

Regel. Sind mehre ungleichnamige untergeordnete Größen in eine übergeordnete zu reduziren, so reduzirt man jede einzelne immer in die nächstübergeordnete; oder man löset alle gegebenen Größen in die kleinste Benennung dieser Größen auf und dividirt diese Zahl mit den nöthigen Reduktionszahlen oder auch mit dem Produkte derselben.

6. Beispiel. 87 ℔ 23 Lth. u. $2^{2}/_{5}$ Quint, wie viel Zentner?

1. Berechnung: $2^{2}/_{5}$ Qnt. $=\frac{2^{2}/_{5}}{4}={}^{12}/_{20}={}^{3}/_{5}$ Lth. — 23 Lth. $+{}^{3}/_{5}$ Lth. $=23^{3}/_{5}$ Lth. — $23^{3}/_{5}$ Lth. $=\frac{23^{3}/_{5}}{32}={}^{118}/_{160}={}^{59}/_{80}$ ℔. — 87 ℔ $+{}^{59}/_{80}$ ℔ $=$ $87^{59}/_{80}$ ℔. — $87^{59}/_{80}$ ℔ $=\frac{87^{59}/_{80}}{100}={}^{7019}/_{8000}$ Ztr.

2. Berechnung: 87 ℔ à 32 Lth. $=2784$ Lth. — 2784 Lth. $+23$ Lth. $=2807$ Lth. — 2807 Lth. à 4 Qt. $=11228$ Qt. — 11228 Qt. $+2^{2}/_{5}$ Qt. $=11230^{2}/_{5}$ Qt. $={}^{56152}/_{5}$ Qt. — $^{56152}/_{5}$ Qt. $=\frac{56152}{5\times 4\times 32\times 100}=$ $^{56152}/_{64000}={}^{7019}/_{8000}$ Ztr. Oder da zu 1 Ztr 100 à 32 Lth. à 4 Qt. erforderlich sind: $12800:{}^{56152}/_{5}=\frac{56152}{5\times 12800}={}^{56152}/_{64000}={}^{7019}/_{8000}$ Ztr.

Hier gilt die zum 5. Beispiel gegebene Regel.

Daß die Auflösungen der 2. Berechnung des 5. u. 6. Beispieles sich wol nicht ganz für die Ausarbeitung im Kopfe eignen, ist wol klar, außer man gestatte den Schülern, die Resultate sich auf die Tafel zu notiren.

Behandlung zusammengesetzter Aufgaben.

1. Beispiel: Wenn 5 Ellen Tuch $13^{1}/_{3}$ fl. gelten; wie hoch kommen $3^{1}/_{2}$ Ellen?

Beurtheilung: Wenn 5 Ellen $13\frac{1}{5}$ fl. gelten, so gelten $3\frac{1}{2}$ Ellen $3\frac{1}{2}$mal das, was 1 Elle kostet, weil $3\frac{1}{2}$ Ellen $3\frac{1}{2}$mal 1 Elle sind. 1 Elle gilt den 5. Theil von $13\frac{1}{5}$ fl., weil 1 Elle der 5. Theil von 5 Ellen ist. Oder: $3\frac{1}{2}$ Ellen gelten so oftmal das, was $\frac{1}{2}$ Elle kostet, als $3\frac{1}{2}$ Ellen halbe Ellen sind, und $\frac{1}{2}$ Elle kostet den so vielsten Theil von $13\frac{1}{5}$ fl., als 5 Ellen halbe Ellen geben.

Berechnung: Nach der ersten Beurtheilung haben wir zu untersuchen, was 1 Elle gilt, nämlich den 5. Theil von $13\frac{1}{5}$ fl. Der 5. Theil von 13 fl. $= 2\frac{3}{5}$ fl.; der 5. Theil von $\frac{1}{3}$ fl. $= \frac{1}{15}$ fl.; 1 Elle gilt also $2\frac{3}{5}$ fl. $+ \frac{1}{15}$ fl. $= 2\frac{9}{15}$ fl. $+ \frac{1}{15}$ fl. $= 2\frac{10}{15}$ fl. $= 2\frac{2}{3}$ fl. Oder: $13\frac{1}{5}$ fl. $= \frac{40}{3}$ fl.; der 5. Theil von $\frac{40}{3}$ fl. $= \frac{40}{15}$ fl. oder $\frac{8}{3}$ fl. $= 2\frac{2}{3}$ fl. Da nun 1 Elle $2\frac{2}{3}$ fl. gilt, so gelten $3\frac{1}{2}$ Ellen $3\frac{1}{2}$mal $2\frac{2}{3}$ fl. 3mal 2 fl. $=$ 6 fl.; 3mal $\frac{2}{3}$ fl. $= \frac{6}{3}$ fl. $=$ 2 fl.; $\frac{1}{2}$mal 2 fl. $=$ 1 fl.; $\frac{1}{2}$mal $\frac{2}{3}$ fl. $= \frac{1}{3}$ fl.; zusammen: 6 fl. $+$ 2 fl. $+$ 1 fl. $+ \frac{1}{3}$ fl. $= 9\frac{1}{3}$ fl. Oder: Da 1 Elle $2\frac{2}{3}$ fl. ($= \frac{8}{3}$ fl.) gilt, so gelten $3\frac{1}{2}$ Ellen ($= \frac{7}{2}$ Ellen) $\frac{7}{2}$mal $\frac{8}{3}$ fl. $= \frac{56}{6} = \frac{28}{3}$ fl. $= 9\frac{1}{3}$ fl. — — Nach der andern Burtheilung haben wir zuerst zu untersuchen, was $\frac{1}{5}$ Elle kostet. 5 Ellen $= \frac{10}{2}$ Ellen; 1 halbe Elle kostet daher den 10. Theil von $13\frac{1}{2}$ fl. $= \frac{40}{3}$ fl.; der 10. Theil von $\frac{40}{3}$ fl. $= \frac{40}{30}$ fl. $= \frac{4}{3}$ fl. $= 1\frac{1}{3}$ fl. $3\frac{1}{2}$ Ellen $= \frac{7}{2}$ Ellen; da nun $\frac{1}{2}$ Elle $1\frac{1}{3}$ fl. gilt, so gelten 7 halbe Ellen 7mal $1\frac{1}{3}$ fl; 7mal 1 fl. $=$ 7 fl.; 7mal $\frac{1}{3}$ fl. $= \frac{7}{3}$ fl. $= 2\frac{1}{3}$ fl., zusammen 7 fl. $+ 2\frac{1}{3}$ fl. $= 9\frac{1}{3}$ fl.; oder: 7mal $1\frac{1}{3}$ fl. $=$ 7mal $\frac{4}{3}$ fl. $= \frac{28}{3}$ fl. $= 9\frac{1}{3}$ fl. Aus dieser Behandlung ergibt sich: $3\frac{1}{2}$ Ellen gelten $3\frac{1}{2}$mal den 5. Theil von $13\frac{1}{3}$ fl., oder $3\frac{1}{2}$mal $\frac{1}{5}$mal $13\frac{1}{3}$ fl. Oder: $3\frac{1}{2}$ Ellen ($= \frac{7}{2}$ Ellen) gelten $3\frac{1}{2}$mal den 10. Theil von $13\frac{1}{3}$ fl. 2mal genommen oder $\frac{7}{2}$mal den 5. Theil von $13\frac{1}{3}$ fl., d. i. $3\frac{1}{2}$mal $\frac{2}{10}$mal $13\frac{1}{3}$ fl. $= \frac{7}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{40}{3}$ fl. $= \frac{28}{3}$ fl. $= 9\frac{1}{3}$ fl. — In reinen Zahlen ausgedrückt heißt das Beispiel: Dividire $13\frac{1}{3}$ durch 5 und multiplizire den Quotienten mit $3\frac{1}{2}$! Oder: Welche Zahl erhält man, wenn man $13\frac{1}{3}$ durch 5 dividirt und das Ergebniß mit $3\frac{1}{2}$ multiplizirt?

2. Beispiel: Wenn $2\frac{2}{3}$ Metzen Getreide $6\frac{2}{5}$ fl. gelten; wie hoch kommen dann $3\frac{3}{4}$ Metzen?

Beurtheilung: Wenn $2\frac{2}{3}$ Metzen $6\frac{2}{5}$ fl. gelten, so kosten $3\frac{3}{4}$ Mtz. $3\frac{3}{4}$mal das, was 1 Metzen gilt, weil $3\frac{3}{4}$ Mtz. $3\frac{3}{4}$mal 1 Mtz. sind. Wir haben nun zu berechnen, was 1 Mtz. gilt. Da wir wissen, was $2\frac{2}{3}$ Mtz. gelten, so müssen wir zuerst berechnen, was $\frac{1}{3}$ Metzen gilt. $\frac{1}{3}$ Metz. gilt den so vielsten Theil von $6\frac{2}{5}$ fl., als $2\frac{2}{3}$ Metz. Drittelmetzen sind, und da der ganze Metzen 3 Drittelmetzen hat, so gilt 1 Metz. 3mal das, was 1 Drittelmetzen kostet.

Berechnung: $2\frac{2}{3}$ Mtz. $= \frac{8}{3}$ Mtz. $\frac{1}{3}$ Metz. kostet den 8. Theil von $6\frac{2}{5}$ fl., weil $\frac{1}{3}$ Mtz. der 8. Theil von $\frac{8}{3}$ Mtz. ist. Der 8. Theil von 6 fl. $= \frac{6}{8}$ fl. $= \frac{3}{4}$ fl.; der 8. Theil von $\frac{2}{5}$ fl. $= \frac{2}{40}$ fl. $= \frac{1}{20}$ fl.; $\frac{1}{3}$ Mtz. gilt also $\frac{3}{4}$ fl. $+ \frac{1}{20}$ fl. $= \frac{15}{20}$ fl. $+ \frac{1}{20}$ fl. $= \frac{16}{20}$ fl. $= \frac{4}{5}$ fl.; oder: $\frac{1}{3}$ Mtz. gilt den 8. Theil von ($6\frac{2}{5}$ fl. $=$) $\frac{32}{5}$ fl. $= \frac{32}{40}$ fl. $= \frac{4}{5}$ fl., folglich der ganze Metzen ($=$ 3mal $\frac{1}{3}$ Metz.) 3mal $\frac{4}{5}$ fl. $= \frac{12}{5}$ fl. $= 2\frac{2}{5}$ fl. $3\frac{3}{4}$ Metzen ($= 3\frac{3}{4}$mal 1 Mtz.) gelten daher $3\frac{3}{4}$mal $2\frac{2}{5}$ fl. $=$ 9 fl., denn

$$3\frac{3}{4} \times 2\frac{2}{5} \text{ fl.} = \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{4} \times \frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{5} \text{ fl.} = 9 \text{ fl.}$$

Fassen wir Alles dieses kürzer zusammen, so heißt es: $3\frac{3}{4}$ Mtz. gelten $3\frac{3}{4}$mal den 8. Theil von $6\frac{2}{5}$ fl. 3mal genommen, oder: $3\frac{3}{4}$mal 3mal den 8. Theil von $6\frac{2}{5}$ fl., d. i. $3\frac{3}{4}$mal $\frac{3}{8}$mal $6\frac{2}{5}$ fl. $= \frac{15}{4} \times \frac{3}{8} \times \frac{32}{5}$ fl. = 9 fl. — In reinen Zahlen ausgedrückt heißt das Beispiel: Dividire $6\frac{2}{5}$ durch $2\frac{2}{3}$ und multiplizire den Quotienten mit $3\frac{3}{4}$! Oder: Welche Zahl entsteht, wenn man $6\frac{2}{5}$ durch $2\frac{2}{3}$ dividirt und das Ergebniß mit $3\frac{3}{4}$ multiplizirt?

Aus der bisherigen Behandlung der Division mit Bruchzahlen ersehen wir, daß auch hier, wie bei der Multiplikation der Brüche, 8 Hauptfälle vorkommen, nämlich:

1. Division eines Bruches durch eine ganze Zahl,
2. " einer gemischten Zahl durch eine ganze Zahl,
3. " einer ganzen Zahl durch einen Bruch,
4. " einer ganzen Zahl durch eine gemischte Zahl,
5. " eines Bruches durch einen Bruch,
6. " einer gemischten Zahl durch einen Bruch,
7. " eines Bruches durch eine gemischte Zahl,
8. " einer gemischten Zahl durch eine gemischte Zahl.

Der Lehrer lege den Schülern bei jedem dieser Fälle viele, den vorgenommenen Fall betreffende Aufgaben vor, und lasse im Anfange alle Operationen, welche die Schüler machen, stets zergliedern und begründen, damit sie die Sache bestimmt und klar auffassen, ihnen Alles zum deutlichen Bewußtsein komme, und sie im Stande sind, auch in der Folge — aufgefordert — in jedem Augenblicke Rechenschaft über ihr Verfahren ablegen zu können. Erst dann suche man durch eine Menge Aufgaben sie zu einer sichern Fertigkeit im Auflösen gegebener Beispiele zu bringen. —

Aufgaben.

1. 4 Personen haben unter sich zu theilen: a) $\frac{1}{2}$ fl., b) $\frac{1}{5}$ Ztr. Reiß, c) $\frac{5}{8}$ Metzen Brodmehl und d) $\frac{4}{9}$ Klafter Holz; was wird jeder Person treffen?

2. 5 Ellen Band gelten $\frac{2}{3}$ fl.; wie hoch kommt 1 Elle? und wie hoch würde 1 Elle kommen, wenn a) 6, b) 7, c) 8 Ellen so viel kosten würden?

3. Wenn 6 Loth einer Waare a) $\frac{1}{5}$ fl., b) $\frac{3}{4}$ fl., c) $\frac{5}{6}$ fl., d) $\frac{6}{7}$ fl., e) $\frac{5}{8}$ fl., oder f) $\frac{7}{12}$ fl. gelten; wie hoch käme in jedem einzelnen Falle das Loth?

4. 3 Arme erhalten von einem Wohlthäter $1\frac{1}{2}$ fl. an Geld, $2\frac{3}{4}$ Metzen Korn, $5\frac{2}{3}$ ℔ Butter und $7\frac{5}{6}$ Ellen Tuch; was erhält jede Person?

5. Wenn 4 Personen $3\frac{1}{5}$ Ztr. Kaffee mit einander kaufen; wie viel Kaffee trifft auf 1 Person? und wie viel würde auf 1 Person treffen, wenn a) 3, b) 5, c) 6, d) 7 Personen ein ebenso großes Quantum Kaffee kauften?

6. Wenn man für 5 Ztr. Waare a) $2\frac{1}{2}$ fl., b) $3\frac{3}{4}$ fl., c) $6\frac{1}{5}$ fl., d) $8\frac{5}{6}$ fl., c) $13\frac{2}{3}$ fl. Fracht bezahlen muß; wie viel Fracht kommt in jedem einzelnen Falle auf den Zentner?

7. Wie hoch kommt 1 Elle Band, wenn $\frac{3}{4}$ Ellen a) 12 kr., b) 21 kr., c) 28 kr., d) 35 kr. gelten?

8. Wie hoch kommt 1 ℔ Tabak, wenn man $\frac{5}{8}$ ℔ a) um 25 kr., b) um 20 kr., c) um 50 kr., d) um 32 kr., e) um 39 kr., f) um 48 kr. kauft?

9. Ein reicher Herr trat in die Hütte eines Armen, in welcher er mehre Kinder heiter an ihrer Arbeit fand. Er schenkte jedem $\frac{2}{3}$ fl. und gab im Ganzen 8 fl. aus; wie viele Kieder waren da?

10. Eine Frau kaufte für 9 Gulden Kaffee und bezahlte für jedes ℔ $\frac{4}{5}$ fl.; wie viel Pfd. und Loth Kaffee erhielt sie?

11. Wie hoch kommt 1 Schfl. Getreide, wenn man $\frac{4}{5}$ Schfl. um 12 fl. kauft? — und wie hoch, wenn man um dasselbe Geld a) $\frac{3}{5}$ Schfl., b) $\frac{5}{6}$ Schfl., c) $\frac{5}{8}$ Schfl., d) $\frac{4}{7}$ Schfl., e) $\frac{7}{9}$ Schfl. erhält?

12. Wenn $1\frac{1}{2}$ Ellen Band a) 15 kr., b) 21 kr., c) 24 kr., d) 32 kr., e) 46 kr. gelten; wie hoch steht 1 Elle?

13. Wie hoch kommt das Pfund einer Waare, wenn $2\frac{2}{3}$ ℔ a) 40 kr., b) 56 kr., c) 36 kr., d) 50 kr., e) 33 kr., f) 39 kr. kosten?

14. Wenn $3\frac{3}{4}$ Schfl. Korn um 45 fl. gekauft werden; wie hoch kommt das Schfl. zu stehen? – und wie hoch kommt 1 Schfl., wenn man eben so viel zahlen muß a) für $2\frac{2}{3}$ Schfl., b) für $4\frac{1}{3}$ Schfl., c) für $3\frac{1}{2}$ Schfl., d) für $5\frac{5}{8}$ Schfl., e) für $4\frac{8}{13}$ Schfl., f) für $7\frac{1}{7}$ Schfl.?

15. Wie hoch kommt 1 ℔ einer Waare, wenn $\frac{1}{3}$ ℔ a) $\frac{1}{2}$ fl., b) $\frac{1}{5}$ fl., c) $\frac{1}{10}$ fl., d) $\frac{1}{6}$ fl., e) $\frac{1}{7}$ fl. — f) $\frac{3}{4}$ fl., g) $\frac{4}{5}$ fl., h) $\frac{2}{3}$ fl., i) $\frac{5}{6}$ fl., k) $\frac{5}{8}$ fl., l) $\frac{4}{7}$ fl. gilt?

16. Wie hoch kommt 1 Elle, wenn $\frac{2}{5}$ Elle a) $\frac{1}{4}$ fl., b) $\frac{1}{3}$ fl., c) $\frac{1}{6}$ fl., d) $\frac{4}{5}$ fl., e) $\frac{3}{4}$ fl., f) $\frac{5}{6}$ fl. g) $\frac{5}{8}$ fl., h) $\frac{4}{7}$ fl., i) $\frac{7}{9}$ fl. gelten?

17. Wenn $\frac{5}{8}$ Loth $\frac{5}{6}$ fl. gelten, wie hoch kommt das ganze Loth? — und wie hoch kommt 1 Loth, wenn a) $\frac{3}{4}$ Lth., b) $\frac{4}{5}$ Lth., c) $\frac{3}{8}$ Lth., d) $\frac{2}{3}$ Lth., e) $\frac{5}{7}$ Lth., f) $\frac{7}{9}$ Lth. a) $\frac{5}{6}$ fl., oder b) $\frac{4}{5}$ fl., oder c) $\frac{4}{7}$ fl. gelten?

18. Ein Weinwirth hat 4 Sorten Wein. Von der 1. Sorte kosten $\frac{3}{4}$ Maß $1\frac{1}{2}$ fl., von der 2ten $1\frac{4}{5}$ fl., von der 3ten $2\frac{2}{3}$ fl. und von der 4ten $3\frac{5}{8}$ fl.; wie hoch kommt von jeder Sorte die ganze Maß zu stehen?

19. Jemand kaufte 4 Reste Tuch, jeden Rest zu $3\frac{2}{3}$ fl.; a) mißt aber $\frac{5}{6}$ Ellen, b) $\frac{3}{4}$ Ellen, c) $\frac{4}{7}$ Ellen und d) $\frac{11}{15}$ Ellen. Wie hoch würde nach diesem Verhältniß die ganze Elle von jeder Sorte zu stehen kommen?

20. Wie hoch kommt je der Zentner Waare, wenn man von a) für $\frac{5}{8}$ Ztr. $9\frac{1}{2}$ fl., von b) für $\frac{7}{10}$ Ztr. $12\frac{1}{4}$ fl., von c) für $\frac{8}{15}$ Ztr. $7\frac{1}{5}$ fl., von d) für $\frac{9}{11}$ Ztr. $13\frac{4}{5}$ fl. bezahlen muß?

21. Wie hoch kommt 1 Elle Band, wenn $2\frac{1}{2}$ Ellen a) $\frac{5}{8}$ fl., b) $\frac{15}{16}$ fl., c) $\frac{4}{5}$ fl., d) $\frac{7}{12}$ fl. gelten?

22. Wenn man um $\frac{5}{6}$ fl. $1\frac{1}{4}$ Loth Gewürz kauft; wie hoch kommt dann 1 Loth? — und wie hoch käme das Loth, wenn man $\frac{5}{6}$ fl. a) für $3\frac{1}{3}$ Lth., b) für $2\frac{2}{5}$ Lth., c) für $1\frac{5}{8}$ Lth., d) für $4\frac{1}{2}$ Lth. bezahlte?

23. Wie hoch kommt je das Pfund einer Waare, wenn man a) für $\frac{5}{8}$ ℔ $2\frac{3}{4}$ fl., b) für $\frac{2}{3}$ ℔ $3\frac{4}{5}$ fl., c) für $\frac{4}{7}$ ℔ $2\frac{5}{6}$ fl., d) für $\frac{9}{10}$ ℔ $5\frac{7}{8}$ fl. zu bezahlen hat?

24. Wie hoch ist die Fracht auf den Zentner berechnet, wenn man für $2\frac{2}{3}$ Ztr. a) $5\frac{1}{3}$ fl., b) $6\frac{2}{5}$ fl. c) $6\frac{2}{7}$ fl., d) $9\frac{3}{4}$ fl. bezahlen muß?

25. Wie hoch kommt 1 Metzen Getreide, wenn man für $3\frac{3}{4}$ Mtz. $9\frac{3}{8}$ fl. zu zahlen hat? und wie hoch kommt 1 Mtz., wenn man ebenfalls $9\frac{3}{8}$ fl. zu bezahlen hat a) für $4\frac{1}{6}$ Mtz, b) für $6\frac{2}{3}$ Mtz., c) für $10\frac{5}{6}$ Mtz., d) für $5\frac{1}{2}$ Mtz.?

26. Jemand hat 4 Kapitale ausstehen: a) mit $3\frac{1}{2}$ Hundert Gulden; b) mit $6\frac{2}{3}$ Hdrt. Guld.; c) mit $4\frac{3}{5}$ Hdrt. Guld., und d) mit $6\frac{1}{4}$ Hdrt. Guld. Das 1te Kapital bringt ihm jährlich $15\frac{3}{4}$ fl., das 2te $22\frac{1}{2}$ fl., das 3te $18\frac{2}{5}$ fl. und das 4te $33\frac{1}{3}$ fl. Zinsen; zu wie viel Prozent ist jedes Kapital ausgeliehen? (wie viel kommt auf's Hundert?)

27. Wenn 4 Ellen Tuch $14\frac{2}{3}$ fl. gelten, wie hoch kommen a) 1 Elle, b) $2\frac{1}{4}$ Elle, c) $5\frac{1}{3}$ Elle, d) $7\frac{3}{8}$ Ellen?

28. Um $4\frac{1}{2}$ fl. Zinsen jährlich einzunehmen, muß man 100 fl. ausborgen; wie viel Geld, (wie oft 100 fl.) muß man ausleihen, a) um 45 fl., b) um 51 fl., c) um $31\frac{1}{2}$ fl., d) um $19\frac{4}{5}$ fl. Zinsen jährlich einzunehmen?

29. Von einem Kapitale betrug der jährliche Zins $18\frac{3}{4}$ fl. Bis zu einer gewissen Zeit hatte man $140\frac{5}{8}$ fl. an Zins eingenommen; wie lange hat es auf Zins gestanden?

30. A hat 4 Sorten Kaffee. Von der 1. Sorte kosten $3\frac{1}{3}$ ℔ $1\frac{1}{2}$ fl., von der 2ten $4\frac{1}{2}$ ℔ $2\frac{5}{8}$ fl., von der 3ten $5\frac{3}{5}$ ℔ $4\frac{2}{3}$ fl., und von der 4ten $1\frac{1}{6}$ ℔ $3\frac{1}{4}$ fl. B kauft von jeder Sorte 5 ℔; C von jeder Sorte $1\frac{3}{5}$ ℔ und D von jeder Sorte $3\frac{3}{4}$ ℔; was hat Jeder für jede Sorte zu bezahlen?

31. Führe jede folgende Zahl in die nächste übergeordnete Größe zurück: 36 kr., 57 kr., 43 kr.; 20 Lth., 12 Lth.; 75 ℔, 52 ℔; 30 Drßgr., 17 Drßgr.; 4 Mtz.; 9 Zoll; 8 Fuß [10 u. 12theilig]; 21 Stunden; 155 Tage [in Jahr]!

32. Wasfür Bruchzahlen der nächsten übergeordneten Größe erhält man aus: 75 kr., 68 Lth., 99 Stunden, 165 ℔, 86 Dreißiger, 56 Zoll, 27 Mtz., 79 Lth., 94 Bogen Papier, 136 Fuß?

33. Reduzire: a) $1\frac{1}{2}$ Monat, $2\frac{1}{4}$, $3\frac{3}{4}$, $2\frac{2}{5}$, $6\frac{2}{3}$ Monat in Jahr; b) $22\frac{1}{2}$ Maß, $11\frac{1}{4}$, $5\frac{5}{8}$, $16\frac{2}{3}$, $8\frac{2}{5}$ Maß in Eimer; c) $2\frac{1}{4}$ Mtz., $3\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{2}{5}$ Mtz. in Schfl.; d) $7\frac{1}{2}$ Bog., $13\frac{1}{3}$, $33\frac{3}{4}$, $56\frac{1}{2}$ Bog. in Buch; e) $2\frac{1}{4}$ Qt., $2\frac{2}{3}$, $5\frac{1}{2}$, $7\frac{3}{4}$, $11\frac{3}{5}$, $27\frac{1}{2}$ Qnt. in Loth!

34. Führe je zurück: a) 3 pf., 7 hl., 15 pf., 36 hl., 54 pf. in Gulden; b) 16 Lth., 25, 40, 65, 92 Lth. in Zentner; c) 8 Drßgr., 20, 28, 42, 66 Drßgr. in Schfl.; d) 18 Bogen Papier, 30, 45, 76, 93 Bog. in Rieß, dann auch in Ballen!

35. Wasfür Bruchzahlen entstehen, wenn man reduzirt: a) 2 pf. 1 hl. in Kreuzer? b) 3 Mtz. 16 Drßgr. in Schfl.? c) 48 kr. 3 pf. in Gulden? d) 19 Lth. 3 Qt. in Pfd.? e) 46 kr. 3 pf. 1 hl. in Gulden? f) 26 ℔ 15 Lth. 2 Qt. in Ztr.?

36. Reduzire: a) 2 pf. $1^3/_4$ hl. in Kreuzer; b) 23 kr. $2^1/_2$ pf. in Gulden; c) 4 Mtz. $13^1/_3$ Drßgr. in Schfl.; d) 5 Fuß $7^1/_5$ Zoll in Ruthen [12theilig]; e) 20 kr. 3 pf. $1^1/_2$ hl. in Gulden; f) 22 ℔ 29 Lth. $1^1/_3$ Qt. in Ztr.!

b) Schriftliche Darstellung.

Wir haben nun noch die schriftliche Darstellung und Behandlung der Division mit Brüchen zu zeigen.

Wie wir bei der Multiplikation der Brüche gesehen haben, so können auch die bei der Division vorkommenden 8 Fälle auf 3 reduzirt werden, wenn man bei denjenigen Fällen, wo gemischte Zahlen vorkommen, diese einrichtet (in unächte Brüche auflöset), und wir haben dann nur:

1) Division eines Bruches durch eine ganze Zahl;
2) Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch, und
3) Division eines Bruches durch einen Bruch.

Insofern endlich noch die ganze Zahl in Bruchform dargestellt wird, lassen sich sogar alle Fälle auf den Einen zurückführen, nämlich:

Division eines Bruches durch einen Bruch.

Aus diesem Grunde können sämmtliche, bei den mündlichen Uebungen aufgestellte Regeln, für das schriftliche Rechnen in bestimmter, gesetzmäßiger Form (wie bei dem Multipliziren) in die Eine, schon zum 5ten Falle gegebene Regel zusammengefaßt werden, und die da heißt: **Stelle Alles — Divisor und Dividend — in Bruchform dar, kehre (stürze) den Divisor um, und multiplizire sodann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner; der dadurch entstehende Bruch ist der verlangte Quotient oder die verlangte Zahl.** Ist diese ein unächter Bruch, so zieht man die Ganzen heraus, indem man mit dem Nenner in den Zähler dividirt.

In den mündlichen Uebungen ist vorstehende Regel hinlänglich begründet worden. Der Lehrer fordere indeß auch bei den schriftlichen Berechnungen die Schüler hin und wieder auf, ihr Verfahren nach der Weise der mündlichen Uebungen zu begründen, um sich zu überzeugen, ob sie auch bei der schriftlichen Behandlung mit Einsicht und deutlichem Bewußtsein arbeiten, damit die Regel nicht zum reinen Mechanismus werde.

Hier dürfte noch eine Bemerkung nicht ganz überflüssig sein. Bei dem Multipliziren ist es gleichgültig, ob man den Multiplikand mit dem Multiplikator, oder den Multiplikator mit dem Multiplikand vervielfacht; man erhält immer dasselbe Resultat. Nicht so ist es bei der Division; hier muß Divisor und Dividend wohl unterschieden werden, denn nur der Divisor darf umgekehrt werden — im gegentheiligen Falle stellt sich ein ganz anderes Ergebniß heraus.

1. Division eines Bruches durch eine ganze Zahl.

Beispiel: Dividire $\frac{481}{673}$ durch 37!

Ansatz und Berechnung:

$$73 : \frac{481}{673} = \frac{37 : 481}{673} = \frac{13}{673}.$$

$$\text{II.} \quad 37 \times \frac{481}{673} = \frac{\overset{37}{481}}{24901} = \frac{13}{673}.$$

Zu I. $37 : 481 = 13$ Quotient.

```
37 : 481 = 13
     37
     ---
     111
     111
     ---
     ---
```

Zu II.

```
  673
   37
 ----
 4711
2019
-----
24901 Produkt.
```

III. $37 : \frac{481}{673} = \frac{24901}{673} : \frac{481}{673} = 24901 : 481 = \frac{481}{24901}^{37)} = \frac{13}{673}$.

IV. $37 : \frac{481}{673} = \left|\frac{37}{1}\right|^{*)} : \frac{481}{673} = \frac{1}{37} \times \frac{481}{673} = \frac{481}{24901} = \frac{13}{673}$.

Erklärung. Bei I. wurde der Zähler des Bruches durch die ganze Zahl (durch den Divisor) dividirt und dem Quotienten 13 der Nenner 673 des Bruches zum Nenner gegeben. Dieses Verfahren ist nur dann anzuwenden, wenn die ganze Zahl in dem Zähler ohne Rest enthalten ist. — Bei II. wurde der Nenner des Bruches mit der ganzen Zahl multiplizirt und dem Produkte der Zähler des Bruches zum Zähler gegeben und sodann der Bruch mit 37 gekürzt. Dieses Verfahren wird immer angewendet, wenn der Divisor (die ganze Zahl) in dem Zähler nicht ohne Rest enthalten ist. — Bei III. wurden Divisor und Dividend gleichnamig gemacht, nämlich die ganze Zahl (37) ebenfalls in 673stel aufgelöset, sodann mit dem Zähler des Divisors in den Zähler des Dividenden dividirt und der dadurch entstandene Bruch gekürzt. — Bei IV. wurde die Aufgabe nach der oben gegebenen Regel behandelt, nämlich: der Divisor 37 ist in $^{37}/_{1}$ verwandelt, also in Bruchform dargestellt und sodann umgekehrt worden.*) Nun wurde Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizirt, das erste Produkt zum Zähler, das andere zum Nenner gesetzt und dieser Bruch noch gekürzt. — $\frac{481}{673}$ durch 37 dividirt ist $\frac{13}{673}$.

2. Division einer gemischten Zahl durch eine ganze Zahl.

Beispiel: Wie oft ist 65 in $294^{59}/_{72}$ enthalten?

Ansatz und Berechnung:

I. $65 : 294\frac{59}{72} = 65 : \frac{21227}{72} = 65 \times \frac{21227}{72} = \frac{21227}{4680} = 4\frac{2507}{4680}$.

```
a)   294        b)   72        c) 4680 : 21227 = 4
      72              65                18720
    ----             ---                -----
     588             360                -2507 Rest.
   2058             432
     +59            ----
   -----            4680
   21227
```

II. $65 : 294\frac{59}{72} = \left|\frac{65}{1}\right| : \frac{21227}{72} = \frac{1}{65} \times \frac{21227}{65} = \frac{21227}{4680} = 4\frac{2507}{4680}$.

*) Daß der Divisor umgekehrt werde, wird gewöhnlich durch zwei senkrechte Striche angezeigt, die den zu stürzenden Divisor einschließen.

Erklärung. Bei I. wurde die gemischte Zahl zuerst unter a) eingerichtet, und da der Divisor 65 in dem Zähler 21227 des Dividenden nicht ohne Rest enthalten ist: so wurde der Nenner 72 desselben unter b) mit dem Divisor multiplizirt, dieses Produkt zum Nenner und der Zähler des Divisors zum Zähler gesetzt, und sodann unter c) die Ganzen herausgezogen. Man könnte auch wieder, wie vorher, Divisor und Dividend gleichnamig machen und sodann mit dem Zähler in den Zähler dividiren. Bei II. wurde wieder der Divisor in Bruchform dargestellt, nachdem die gemischte Zahl eingerichtet war, und nach der gegebenen Regel verfahren. — 65 ist also in $294^{59}/_{72}$ $4\frac{2507}{4680}$mal enthalten.

3. Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch.

Beispiel: Es soll 597 durch $^{29}/_{35}$ dividirt werden!

Ansatz und Berechnung:

$$\text{I.}\quad \frac{29}{35} : 597 = \frac{29}{35} : \frac{20895}{35} = 35 : 20895 = 720\frac{15}{29}.$$

a)
```
 597
  35
2985
1791
20895
```

b)
```
29 : 20895 = 720
     203
     --59
       58
       -15
        00
        15 Rest.
```

$$\text{II.}\quad \frac{29}{35} : 597 = \left|\frac{29}{35}\right| : \frac{597}{1} = \frac{35}{29} \times \frac{597}{1} = \frac{20895}{29} = 720\frac{15}{29}.$$

Erklärung. Bei I. wurden Divisor und Dividend gleichnamig gemacht, indem die Ganzen (597) durch Multiplikation mit 35 unter a) in 35stel aufgelöset wurden; unter b) wurde sodann mit dem Zähler des Divisors in den Zähler des Dividenden dividirt. — Bei II. ist die Berechnung wieder nach der gegebenen Regel gelöset worden. — 597 dividirt durch $^{29}/_{35}$ gibt $720^{15}/_{29}$ zum Quotienten.

4. Division einer ganzen Zahl durch eine gemischte Zahl.

Beispiel: Wie oft ist $35^{7}/_{15}$ in 582 enthalten?

Ansatz und Berechnung:

$$\text{I.}\quad 35\frac{7}{15} : 582 = \frac{532}{15} : \frac{8730}{15} = 532 : 8730 = 16\frac{\overset{2}{218}}{532}\Big| = 16\frac{159}{266}.$$

a)
```
 35
 15
182
 35
532
```

b)
```
 582
  15
2910
 582
8730
```

c)
```
532 : 8730 = 16
      532
     3410
     3192
     -218 Rest.
```

II. $35\frac{7}{15} : 582 = \left|\frac{532}{15}\right| : \frac{582}{1} = \frac{15}{532} \times \frac{582}{1} = \frac{8730}{532} = 16\frac{218}{532} = 16\frac{159}{266}$.

Erklärung. Zu I. Unter a) ist die gemischte Zahl $35^7/_{15}$ und unter b) die ganze Zahl in 15tel aufgelöset worden; unter c) wurde mit dem Zähler des Divisors in den Zähler des Divenden getheilt, sodann der Bruch des Quotienten noch mit 2 gekürzt. — Bei II. wurde zuerst die gemischte Zahl (der Divisor) eingerichtet, die ganze Zahl (der Dividend) in Bruchform dargestellt (ihr 1 zum Nenner gegeben), der Divisor gestürzt, Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizirt, endlich die Ganzen herausgezogen und der verbleibende Bruch durch 2 gekürzt. — $35^7/_{15}$ ist in 582 $16^{159}/_{266}$mal enthalten.

5. Division eines Bruches durch einen Bruch.

1. Beispiel: Dividire $\frac{97}{158}$ durch $\frac{29}{158}$!

(Beide Brüche sind gleichnamig.)

Ansatz und Berechnung:

$$\text{I. } \frac{29}{158} : \frac{97}{158} = 29 : 97 = 3\frac{10}{29}.$$

$$\begin{array}{r} 87 \\ \hline 10 \text{ Rest.} \end{array}$$

$$\text{II. } \left|\frac{29}{158}\right| : \frac{97}{158} = \frac{158}{29} \times \frac{97}{158} = \frac{15326}{4582} = 3\frac{1580}{4582} = 3\frac{10}{29}.$$

a) $\begin{array}{r} 158 \\ 97 \\ \hline 1106 \\ 1422 \\ \hline 15326 \end{array}$ Zähler.

b) $\begin{array}{r} 158 \\ 29 \\ \hline 1422 \\ 316 \\ \hline 4582 \end{array}$ Nenner.

c) $\begin{array}{r} 4582 : 15326 = 3 \\ 13746 \\ \hline 1580 \end{array}$ Rest.

d) $\frac{1580}{4582} = \frac{10}{29}$. (158)

$$\text{III. } \left|\frac{29}{158}\right| : \frac{97}{158} = \frac{158}{29} \times \frac{97}{158} = \frac{97}{29} = 3\frac{10}{29}.$$

Erklärung. Sind die beiden Brüche gleichnamig, so hat man es nur mit den Zählern zu thun, und man braucht nur mit dem Zähler des Divisors in den Zähler des Dividenden zu theilen, wie bei I. geschehen. Will man indeß doch die Berechnung nach der gegebenen Regel lösen, wie II. zeigt, so wird, nachdem der Divisor gestürzt worden ist, Zähler und Zähler (a), dann Nenner und Nenner (b) mit einander multiplizirt, ersteres Produkt zum Zähler und letzteres zum Nenner gesetzt; endlich die Ganzen herausgezogen (c), wenn ein unächter Bruch entstanden ist, und der verbleibende Bruch gekürzt (d). — Diese Berechnung kann jedoch dadurch abgekürzt werden, daß man, nachdem der Divisor umgekehrt worden, den Zähler des einen Bruchs gegen den Nenner des andern Bruches aufhebt, wie III. lehrt. — Indessen ist das erste Verfahren das kürzeste, wie der Augenschein darthut. — $\frac{97}{158}$ dividirt durch $\frac{29}{158}$ gibt $3\frac{10}{29}$.

2. Beispiel: Dividire $^{23}/_{28}$ durch $^{14}/_{15}$!

(Die beiden Bruchzahlen sind ungleichnamig.)

Ansatz und Berechnung:

$$\text{I. } \frac{14}{15} : \frac{23}{28} = \frac{392}{420} : \frac{345}{420} = 392 : 345 = \frac{345}{392}.$$

a) $28 \times 15 = 420$ gemeinschaftlicher Nenner.

$$\begin{array}{r} 140 \\ 28 \\ \hline 420 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{c|l} & 420 \\ \frac{14}{15} & 28 \times 14 = 392. \\ \frac{23}{28} & 15 \times 23 = 345. \end{array}$$

$$\text{II. } \left|\frac{14}{15}\right| : \frac{23}{28} = \frac{15}{14} \times \frac{23}{28} = \frac{345}{392}.$$

a)
$$\begin{array}{r} 23 \\ 15 \\ \hline 115 \\ 23 \\ \hline 345 \end{array}$$ Zähler.

b)
$$\begin{array}{r} 28 \\ 14 \\ \hline 112 \\ 28 \\ \hline 392 \end{array}$$ Nenner.

Erklärung. Zu I. sind Divisor und Dividend unter b) gleichnamig gemacht worden, nachdem man unter a) den gemeinschaftlichen Nenner gesucht hatte. Das Uebrige wie oben. Bei II. wurde der Divisor umgekehrt, unter a) Zähler mit Zähler, unter b) Nenner mit Nenner multiplizirt; das erste Produkt nimmt man zum Zähler, das zweite zum Nenner und erhält sodann $^{345}/_{392}$ zum verlangten Quotienten. Das letztere Verfahren ist, wie die Darstellung lehrt, das kürzere. — $^{23}/_{28}$ dividirt durch $^{14}/_{15}$ ist $^{345}/_{392}$.

Bemerkung. In manchen (ältern) Rechenbüchern sind ähnliche Aufgaben zur Berechnung auf folgende Weise veranschaulicht, indem durch ein querliegendes Kreuz zwischen Divisor und Dividend der stärkere, von links nach rechts aufsteigende Querstrich, z. B. $^{14}/_{15}$ ╳ $^{23}/_{28}$, anzeigen soll, daß diese beiden Zahlen (15 und 23) mit einander multiplizirt und ihr Produkt zum Zähler, das Produkt der beiden andern, durch den von links nach rechts ablaufenden, schwächern Strich verbundenen, zum Nenner genommen werden soll. Das sicherste Verfahren bleibt aber das oben bei II. Dargestellte.

6. Division einer gemischten Zahl durch einen Bruch.

Beispiel: Theile $41^7/_8$ durch $^{19}/_{25}$!

Ansatz und Berechnung:

$$\frac{19}{25} : 41\frac{7}{8} = \left|\frac{19}{25}\right| : \frac{335}{8} = \frac{25}{19} \times \frac{335}{8} = \frac{8375}{152} = 55\frac{15}{152}.$$

a)	b)	c)
335	19	152 : 8375 = 55
25	8	760
1675	152 Nenner.	-775
670		760
8375 Zähler.		-15 Rest.

Erklärung. Der Dividend $41\frac{7}{8}$ wurde eingerichtet (in Achtel aufgelöset $= \frac{335}{8}$), der Divisor $\frac{19}{25}$ gestürzt $= \frac{25}{19}$; die weitere Berechnung nach der gegebenen Regel, wie bei vorhergehendem Beispiel ad II. — $41\frac{7}{8}$ getheilt durch $\frac{19}{25}$ ist $55\frac{15}{152}$.

7. Division eines Bruches durch eine gemischte Zahl.

Beispiel: Wie oft ist $17\frac{13}{14}$ in $\frac{29}{33}$ enthalten?

Ansatz und Berechnung:

$$17\frac{13}{14} : \frac{29}{33} = \left|\frac{251}{14}\right| : \frac{29}{33} = \frac{14}{251} = \frac{29}{33} = \frac{406}{8283}.$$

a)	b)	c)
$17 + \frac{13}{14}$	29	251
14	14	33
68	116	753
17	29	753
+ 13	406	8283
251		
14		

Erklärung. Der unter a) eingerichtete Divisor wurde umgekehrt, sodann wie oben gerechnet. — $17\frac{13}{14}$ ist in $\frac{29}{33}$ $\frac{406}{8283}$mal enthalten. —

8. Division einer gemischten Zahl durch eine gemischte.

Beispiel: $597\frac{6}{7}$ ist durch $34\frac{5}{8}$ zu dividiren.

Ansatz und Berechnung:

$$34\frac{5}{8} : 597\frac{6}{7} = \left|\frac{277}{8}\right| : \frac{4185}{7} = \frac{8}{277} \times \frac{4185}{7} = \frac{33480}{1939} = 17\frac{517}{1939}.$$

Erklärung. Beide gemischte Zahlen wurden eingerichtet, der Divisor gestürzt, und — die weitere Berechnung ist bekannt. — $597\frac{6}{7}$ durch $34\frac{5}{8}$ dividirt gibt $17\frac{517}{1939}$.

Berechnung einiger angewandter und zusammengesetzter Aufgaben.

1. Beispiel: Ein Getreidehändler kauft 27 Schfl. Getreide und bezahlt dafür $583\frac{7}{8}$ fl.; wie hoch kommt ihm das Schäffel zu stehen?

Beurtheilung: Wenn 27 Schfl. $583\frac{7}{8}$ fl. gelten, so gilt 1 Schfl. den 27ten Theil von $583\frac{7}{8}$ fl., weil 1 Schfl. auch der 27ste Theil von 27 Schfl. ist. Man hat also mit 27 in $583\frac{7}{8}$ zu dividiren.

Ansatz und Berechnung:

I. $27 : 583\frac{7}{8}$ fl. $= 27 : \frac{4671}{8} = \frac{27 : 4671}{8} = \frac{173}{8} = 21\frac{5}{8}$ fl.

a) 27 : 4671 = 173.
27
197
189
–81
81
0

Erklärung. Der Dividend wurde eingerichtet (in 8tel aufgelös't), und da der Divisor in dem Zähler des Dividenden ohne Rest enthalten ist, so dividirte man sogleich mit der ganzen Zahl in den Zähler und zog die Ganzen heraus.

Antwort: Das Schäffel kommt ihn auf $21\frac{5}{8}$ fl.

II. $27 : 583\frac{7}{8}$ fl. $= \left|\frac{27}{1}\right| : \frac{4671}{8} = \frac{1}{27} \times \frac{4671}{8} = \frac{4671}{216} = 21\frac{5}{8}$ fl.

a) 216 : 4671 = 21.
432
–351
216
135 Rest.

b) $\frac{135}{216} \Big|^{27)} = \frac{5}{8}$.

Erklärung. Die gemischte Zahl wurde eingerichtet, der Divisor in Bruchform dargestellt, umgekehrt, sodann multiplizirt, die Ganzen herausgezogen (a) und der verbleibende Bruch durch 27 gekürzt (b).

2. Beispiel: Ein Landkrämer erhielt 1 Ztr. 52 Pfd. Kaffee und mußte dafür $72\frac{5}{6}$ fl. bezahlen; wie hoch ist ihm das Pfund berechnet?

Beurtheilung: Wenn 1 Ztr. 52 ℔ $72\frac{5}{6}$ fl. kosten, so gilt 1 Pfd. den so vielsten Theil von $72\frac{5}{6}$ fl., als 1 Ztr. 52 ℔ Pfund sind, nämlich den 152sten Theil, da 1 Ztr. 52 Pfd. = 152 Pfd. sind; denn 1 Pfd. ist der 152ste Theil von 152 Pfd. Wir haben also mit 152 in $72\frac{5}{6}$ zu dividiren.

Ansatz und Berechnung:

$152 : 72\frac{5}{6} = \left|\frac{152}{1}\right| : \frac{437}{6} = \frac{1}{152} \times \frac{437}{912}{}^{19)} = \frac{23}{48}$ fl.

Erklärung. Die gemischte Zahl wurde eingerichtet, der Divisor in Bruchform dargestellt, gestürzt, dann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizirt und der dadurch erhaltene Bruchquotient mit 19 gekürzt.

Antwort: Das Pfund Kaffee ist ihm zu $\frac{13}{48}$ fl. berechnet.

3. Beispiel: $\frac{11}{15}$ Eimer Wein kauft man um 69 fl.; wie hoch steht der Eimer im Preis?

Beurtheilung: Wenn $\frac{11}{15}$ Eimer 69 fl. gelten, so muß 1 Eimer so oftmal das kosten, was $\frac{1}{15}$ Eimer gilt, als 1 Eimer 15tel Eimer gibt. $\frac{1}{15}$ Eimer gilt aber den 11ten Theil von 69 fl., weil $\frac{1}{15}$ Eimer der 11te Theil von $\frac{11}{15}$ Eimer ist. 1 Eimer = $\frac{15}{15}$ Eimer. 1 Eimer gilt sonach den 11ten Theil von 69 fl. 15mal genommen oder 15mal den 11ten Theil von 69 fl., d. i. $\frac{15}{11}$mal 69 fl. Es ist also mit $\frac{11}{15}$ in 69 zu theilen.

Ansatz und Berechnung:

$\frac{11}{15} : \overset{\text{fl.}}{69} = \left|\frac{11}{15}\right| : \frac{69}{1} = \frac{15}{11} \times \frac{69}{1} = \frac{1035}{11} = 94\frac{1}{11}$ fl.

a) 69
15
345
69
1035

b) 11 : 1035 = 94
99
–45
44
1 Rest.

Erklärung. Der Dividend wurde in Bruchform dargestellt, der Divisor gestürzt — das Weitere ist bekannt.

Antwort: 1 Eimer kommt auf $94\frac{1}{11}$ fl. zu stehen.

4. Beispiel: Ein Stück Tuch mißt $73\frac{7}{8}$ Ellen und kostet 345 fl.; was ist 1 Elle werth?

Beurtheilung: Wenn $73\frac{7}{8}$ Ellen 345 fl. gelten, so kostet 1 Elle so oftmal das, was $\frac{1}{8}$ Elle gilt, als 1 Elle 8tel Ellen sind; 1 Elle = 8 Achtel-Ellen. $\frac{1}{8}$ Elle gilt aber den so vielsten Theil von 345 fl., als $73\frac{7}{8}$ Ellen 8tel Ellen geben, weil $\frac{1}{8}$ Elle der sovielste Theil von $73\frac{7}{8}$ Ellen ist, als $73\frac{7}{8}$ Ellen 8tel Ellen geben; $73\frac{7}{8}$ Ellen = $\frac{591}{8}$ Ellen. 1 Elle gilt also den 591sten Theil von 345 fl. 8mal genommen oder 8mal den 591sten Theil von 345 fl., d. i. $\frac{8}{591}$mal 345 fl. Oder: 1 Elle gilt den $73\frac{7}{8}$ Theil von 345 fl., da 1 Elle der $73\frac{7}{8}$te Theil von $73\frac{7}{8}$ Ellen ist. Man hat also mit $73\frac{7}{8}$ in 345 fl. zu dividiren.

Ansatz und Berechnung:

$$73\tfrac{7}{8} : 345\text{fl.} = \left|\tfrac{591}{8}\right| : \tfrac{345}{1} = \tfrac{8}{591} \times \tfrac{345}{1} = \tfrac{2760}{591} = \overline{4\tfrac{396}{591}}^{\,3} = 4\tfrac{132}{197}\text{fl.}$$

Erklärung. Der Dividend (345) wurde in Bruchform dargestellt, der Divisor ($73\frac{7}{8}$) eingerichtet und gestürzt; die übrige Berechnung ist bekannt.

Antwort: 1 Elle ist $4\frac{132}{197}$ fl. werth.

5. Beispiel: Ein Wachszieher hat $87\frac{3}{5}$ ℔ Wachs; daraus verfertigt er Wachskerzen, wozu er auf jede $\frac{7}{16}$ ℔ Wachs rechnet. Wie viele Wachskerzen hofft er zu bekommen?

Beurtheilung: Braucht man zu 1 Wachskerze $\frac{7}{16}$ ℔ Wachs, so wird man so viele Kerzen bekommen, als $\frac{7}{16}$ ℔ in $87\frac{3}{5}$ ℔ enthalten sind; denn man erhält so oftmal 1 Kerze, als man $\frac{7}{16}$ ℔ in $87\frac{3}{5}$ ℔ hat oder als man $\frac{7}{16}$ ℔ von $87\frac{3}{5}$ ℔ nehmen kann. Wie oft $\frac{7}{16}$ ℔ in $87\frac{3}{5}$ ℔ enthalten sind, findet man durch Division.

Ansatz und Berechnung:

$$\overset{℔}{\tfrac{7}{16}} : \overset{℔}{87\tfrac{3}{5}} = \left|\tfrac{7}{16}\right| : \tfrac{438}{5} = \tfrac{16}{7} \times \tfrac{438}{5} = \tfrac{7008}{35} = 200\tfrac{8}{35} \text{ Wachskerzen.}$$

```
a)  438        b) 35:7008=200
     16              70
   ----             ----
   2628             --08 Rest.
   438
   ----
   7008
```

Erklärung. Die Berechnung ist aus dem Obigen bekannt genug.

Antwort: Aus $87\frac{3}{5}$ ℔ Wachs erhält der Wachszieher $200\frac{8}{35}$ Kerzen.

6. Beispiel: Wenn man für $54\frac{4}{5}$ Hundert Gulden Kapital jährlich $234\frac{6}{7}$ fl. Zins einnimmt; zu wie viel Procent ist das Kapital ausgeliehen? d. h. wie viel Zins bringen Ein Hundert Gulden?

Beurtheilung: Bringen $54\frac{4}{5}$ Hundert Gulden Kapital $234\frac{6}{7}$ fl. Zins, so bringt 1 Hndrt. fl. nur den so vielsten Theil von $234\frac{6}{7}$ fl. Zins, als $54\frac{4}{5}$ Hndrt. fl. 1 Hndrt. fl. sind; denn 1 Hndrt. fl. ist auch nur der $54\frac{4}{5}$te Theil von $54\frac{4}{5}$ Hndrt. fl. — Oder: $54\frac{4}{5}$ Hndrt. fl. sind $54\frac{4}{5}$mal 1 Hndrt. fl.; da nun $54\frac{4}{5}$ Hndrt. fl. $234\frac{6}{7}$ fl. Zins bringen, so muß der Zins von 1 Hndrt. in $234\frac{6}{7}$ fl. Zins $54\frac{4}{5}$mal enthalten sein. $234\frac{6}{7}$ fl. Zins ist ein Produkt aus $54\frac{4}{5}$ und der zu suchenden Zahl des Zinses von 1 Hndrt. fl. Ist das Produkt und der eine Faktor bekannt, so findet man den andern, der mit dem bekannten Faktor vervielfacht, das Produkt gibt, wenn man untersucht, wie oftmal der gegebene Faktor im Produkte enthalten ist; weßwegen also mit $54\frac{4}{5}$ in $235\frac{6}{7}$ zu dividiren ist.

Ansatz und Berechnung:

$$54\tfrac{4}{5} : 234\tfrac{6}{7}\text{ fl.} = \left|\tfrac{274}{5}\right| : \tfrac{1644}{7} = \tfrac{5}{274} \times \tfrac{1644}{7} = \tfrac{8120}{1918} =$$

$$4\tfrac{548}{1918} \overset{2)}{\overline{|}} = 4\tfrac{274}{959} \overset{137)}{\overline{|}} = 4\tfrac{2}{7}\text{ fl. Zins.}$$

Erklärung. Divisor und Dividend wurden eingerichtet; alle weitere Berechnung ist aus dem Vorhergehenden klar.

Antwort: 1 Hundert Gulden bringen jährlich $4\frac{2}{7}$ fl. Zins, d. h. das Kapital ist zu $4\frac{2}{7}$ Procent ausgelegt.

Daß auch bei der Division mit Brüchen, wie bei der Multiplikation, Abkürzungen statt finden können, glauben wir kaum noch erwähnen zu sollen, möge aber doch noch an folgendem Beispiele gezeigt sein:

$$54\frac{4}{5} : 234\tfrac{6}{7} = \left|\frac{274}{5}\right| : \frac{1644}{7} = \frac{5}{\underset{1}{274}} \times \frac{\overset{6}{1644}}{7} = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}.$$

Erklärung. Nachdem der Divisor umgekehrt worden, ist dessen Nenner gegen den Zähler des Dividenden mit 274 gekürzt worden.

Zusammengesetzte Aufgaben.

1. Beispiel: Wenn $2\frac{13}{16}$ Schfl. Roggen $34\frac{1}{5}$ fl. gelten; was hat man für $86\frac{2}{3}$ Schfl. Roggen zu bezahlen?

Beurtheilung: I. Wenn $2\frac{13}{16}$ Schfl. $34\frac{1}{5}$ fl. gelten, so gilt 1 Schfl. den so vielsten Theil von $34\frac{1}{5}$ fl., als $2\frac{13}{16}$ Schfl. 1 Schfl. geben. $2\frac{13}{16}$ Schfl. sind $2\frac{13}{16}$mal 1 Schfl. Den $2\frac{13}{16}$ten Theil von $34\frac{1}{5}$ fl. findet man durch Division mit $2\frac{13}{16}$ in $34\frac{1}{5}$ fl. — $86\frac{2}{3}$ Schfl. gelten sodann $86\frac{2}{3}$mal das, was 1 Schfl. gilt; daher muß der Preis von 1 Schfl. mit $86\frac{2}{3}$ multiplizirt werden. — Oder II. Da $2\frac{13}{16}$ Schfl. $34\frac{1}{5}$ fl. gelten, so müssen $86\frac{2}{3}$ Schfl. so oftmal $34\frac{1}{5}$ fl. gelten, als $2\frac{13}{16}$ Schfl. vorhanden sind, d. h. als $2\frac{13}{16}$ Schfl. in $86\frac{2}{3}$ Schfl. enthalten sind. Man hat also mit $2\frac{13}{16}$ in $86\frac{2}{3}$ zu dividiren und mit dem erhaltenen Quotienten $34\frac{1}{5}$ fl. zu multipliziren.

Ansatz und Berechnung:

I. a) $$2\frac{13}{16} : \overset{\text{fl.}}{34\frac{1}{5}} = \left|\frac{45}{16}\right| : \frac{171}{5} = \frac{16}{\underset{5}{45}} \times \frac{\overset{19}{171}}{5} = \frac{304}{25} = 12\frac{4}{25}\text{ fl. gilt 1 Schfl.}$$

b) $$\overset{\text{fl.}}{12\frac{4}{25}} \times 86\frac{2}{3} = \frac{304}{\underset{5}{25}} = \frac{\overset{52}{260}}{3} = \frac{15808}{15} = 1053\frac{13}{15}\text{ fl. gelt. } 86\tfrac{2}{3}\text{ Sch.}$$

Oder kürzer beide Berechnungen in einem Ansatze:

c) $$\left(2\frac{13}{16} : \overset{\text{fl.}}{34\frac{1}{5}}\right) \times 86\frac{2}{3} = \left(\left|\frac{45}{16}\right| : \frac{171}{5}\right) \times \frac{260}{3} = \frac{16}{\underset{5}{45}} \times \frac{\overset{19}{171}}{5} \times \frac{\overset{52}{260}}{3}$$

$$= \frac{15808}{15} = 1053\tfrac{13}{15}\text{ fl. gelten } 86\tfrac{2}{3}\text{ Schfl.}$$

II. a) $2\frac{13}{16}$ Schfl. : $86\frac{2}{3}$ Schfl. $= \left|\frac{45}{16}\right| : \frac{260}{3} = \frac{16}{45} \times \frac{260}{3} = \frac{832}{27} = 30\frac{22}{27}$mal enthalten.

b) $34\frac{1}{5}$ fl. $\times 30\frac{22}{27} = \frac{171}{5} \times \frac{832}{27} = \frac{15808}{15} = 1053\frac{13}{15}$ fl. gelten die $86\frac{2}{3}$ Schäffel.

Oder kürzer:

c) $\left(2\frac{13}{16}\text{ Schfl.} : 86\frac{2}{3}\text{ Schfl.}\right) \times 34\frac{1}{5}\text{ fl.} = \left(\left|\frac{45}{16}\right| : \frac{260}{3}\right) \times \frac{171}{5} = \frac{16}{45} \times \frac{260}{3} \times \frac{171}{5} = \frac{15808}{15} = 1053\frac{13}{15}$ fl.

Erklärung. Bei I. wurde unter a) berechnet, wie hoch 1 Schfl. kommt; unter b) wurde der Preis von 1 Schfl. $86^2/_3$mal genommen, also berechnet, was $86^2/_3$ Schfl. gelten. Unter c) wurden beide Grundansätze der vorigen Einzelberechnung in einen einzigen Ansatz und in eine Berechnung gebracht.

Bei II. ist unter a) gesucht worden, wie oft $2^{13}/_{16}$ Schfl. in $86^2/_3$ Schfl. enthalten sind, wie oftmal man den Preis von $2^{13}/_{16}$ Schfl. nehmen muß, um den Werth von $86^2/_3$ Schfl. zu finden, was dann unter b) berechnet worden. Unter c) wie oben zu c) gesagt. Das Uebrige ist bekannt.

Antwort: Für diese $86^2/_3$ Schfl. Roggen hat man $1053^{13}/_{15}$ fl. zu bezahlen.

2. Beispiel: Ein Winzer ist seit 6 Jahren Besitzer eines Weinberges. Im ersten Jahre nahm er aus dem verkauften Weine 8mal $46^3/_5$ fl. ein; im 2ten Jahre das $1^1/_3$fache von dem im 1ten; im 3ten Jahre $^7/_{16}$mal weniger, als im 2ten; im 4ten Jahre $^{15}/_{48}$mal so viel, als in den vorhergehenden 3 Jahren zusammen; im 5ten Jahre $^3/_5$mal mehr als im 4ten, und im 6ten Jahre $1^1/_4$mal so viel als im 5ten. Es fragt sich: 1) Wie viel hat er in jedem Jahre eingenommen? 2) wie viel in allen 6 Jahren zusammen? 3) wie viel in jedem folgenden Jahre mehr oder weniger, als in dem zunächst vorhergehenden? 4) wie viel durchschnittlich in jedem Jahre? 5) zu wie viel Prozent rentirt sich der Weinberg, wenn derselbe mit einer Summe von 3480 fl. angekauft worden ist? (d. h. wie viel Jahreseinnahme wirft 1 Hundert Gulden jährlich ab, wenn 3480 fl. = $34^4/_5$ Hundert Gulden durchschnittlich in einem Jahre eine gewisse Summe von — (? fl.) einbringen?)

Beurtheilung: Es ist nun zu suchen: a) die Einnahme des 1ten Jahres, welche 8mal $46^3/_5$ fl. beträgt; b) die Einnahme des 2ten Jahres, die $1^1/_3$mal die des 1ten ist; c) die Einnahme des 3ten Jahres, welche $^7/_{16}$mal weniger, also nur $^9/_{16}$mal so viel, als im 2ten Jahre macht; d) die Einnahme der 3 ersten Jahre; e) die Einnahme des 4ten Jahres, die $^{15}/_{48}$mal so viel beträgt, als in den vorhergehenden 3 Jahren zusammen; f) die Einnahme des 5ten Jahres, die $^3/_5$mal mehr, also $1^3/_5$mal so viel

ist, als die des 4ten; g) die Einnahme des 6ten Jahres, welche $1^1/_4$mal so viel beträgt, als die des 5ten Jahres; h) die Größe der Einnahme in allen 6 Jahren zusammen; i) wie viel mehr oder weniger in dem 2ten Jahre, als in dem ersten; k) in dem dritten Jahre als im 2ten; l) im 4ten Jahre als im 3ten; m) in dem 5ten Jahre als im 4ten; n) in dem 6ten Jahre als im 5ten; o) die durchschnittliche Einnahme in jedem Jahre, welche der 6. Theil der Gesammt-Einnahme ist; p) das jährliche Erträgniß auf 100 fl. Ankaufskapital, welches der so vielste Theil des jährlichen Durchschnitts-Erträgnisses ist, als 1 Hundert Gulden auf Ankauf des Weinberges verwendet wurden, nämlich 3480 fl. = $34^4/_5$mal 1 Hundert Gulden, daher der $34^4/_5$te Theil des jährlichen Durchschnitts-Erträgnisses.

Ansätze und Berechnungen:

fl.

a) $46^3/_5 \times 8 = \frac{233}{5} \times \frac{8}{1} = \frac{1864}{5} = 372^4/_5$ fl. Einnahm. im 1ten J.

b) $372^4/_5 \times 1^2/_3 = \frac{1864}{\not 5} \times \frac{\not 5}{3} = \frac{1864}{3} = 621^1/_3$ fl. Einnahm. i. 2ten J.

c) $621^1/_3 \times \frac{9}{16} = \frac{\overset{233}{\not{1864}}}{\not 3} \times \frac{\overset{3}{\not 9}}{\underset{2}{\not{16}}} = \frac{699}{2} = 394^1/_2$ fl. Enhm. i. 3ten J.

d)

fl.	30
$372^4/_5$	24
$621^1/_3$	10
$349^1/_2$	15
$1343^{19}/_{30}$	$\frac{49}{30} = 1^{19}/_{30}$ Einnahme in den 3 ersten Jahren.

e) $1343^{19}/_{30} \times {}^{15}/_{48} = \frac{40309}{\underset{2}{\not{30}}} \times \frac{\not{15}}{48} = \frac{40309}{96} = 419^{85}/_{96}$ fl. E. i. 4. J

f) $419^{85}/_{96} \times 1^3/_5 = \frac{40309}{\underset{12}{\not{96}}} \times \frac{\not 8}{5} = \frac{40309}{60} = 671^{49}/_{60}$ fl. E. i. 5. J.

g) $671^{49}/_{60} \times 1^1/_4 = \frac{40309}{\underset{12}{\not{60}}} \times \frac{\not 5}{4} = \frac{40309}{48} = 839^{37}/_{48}$ fl. E. i. 6. J.

h)

	480	
$1343^{19}/_{30}$	$16 \times 19 = 304$	Einnahme in den 3 ersten Jahren.
$419^{85}/_{96}$	$5 \times 85 = 425$	Einnahme im vierten Jahre.
$671^{49}/_{60}$	$8 \times 49 = 392$	" " 5ten "
$839^{37}/_{48}$	$10 \times 37 = 370$	" " 6ten "
$3275^{17}/_{160}$	$\frac{1491}{480} = 3\frac{51}{480} = 3^{17}/_{196}$	Einnahme in allen 6 Jahren.

fl. 15

i) $621\frac{1}{3}$ | 5 Einnahme im 2ten Jahre.
$372\frac{4}{5}$ | 12 „ „ 1ten „

$248\frac{8}{15}$ | $\frac{8}{15}$ im 2ten Jahre mehr, als im ersten.

fl. 6

k) $621\frac{1}{3}$ | 2 Einnahme im 2ten Jahre.
$449\frac{1}{2}$ | 3 „ „ 3ten „

$271\frac{5}{6}$ | $\frac{5}{6}$ im 3ten Jahre weniger, als im 2ten.

fl. 96

l) $419\frac{85}{96}$ | 85 Einnahme im 4ten Jahre.
$349\frac{1}{2}$ | 48 „ „ 3ten „

$70\frac{37}{96}$ | $\frac{37}{96}$ im 4ten Jahre mehr, als im 3ten.

fl. 480

m) $671\frac{49}{60}$ | $8 \times 49 = 392$ Einnahme im 5ten Jahre.
$419\frac{85}{96}$ | $5 \times 85 = 425$ „ „ 4ten „

$251\frac{447}{480}$ | $\frac{447}{480}$ im 5ten Jahre mehr, als im 6ten.

fl. 240

n) $839\frac{37}{48}$ | $5 \times 37 = 185$ Einnahme im 6ten Jahre.
$671\frac{49}{60}$ | $4 \times 49 = 196$ „ „ 5ten „

$167\frac{229}{240}$ | $\frac{229}{240}$ im 6ten Jahre mehr, als im 5ten.

o) $6 : 3275\frac{17}{160} = \frac{524017}{6 \times 160} = \frac{524017}{960} = 545\frac{817}{960}$ fl. durchschnittliche Jahres-Einnahme.

p) 3480 fl. Kapital = $34\frac{4}{5}$mal 100 fl. oder $34\frac{4}{5}$ Hundert Gulden.

$$34\tfrac{4}{5} : 545\tfrac{817}{960} = \left|\frac{174}{5}\right| : \frac{524017}{960} = \frac{5}{174} \times \frac{524017}{960_{192}} = \frac{524017}{33408} = 15\tfrac{22897}{33408} \text{ fl.}$$

bringen 1 Hundert Gulden ausgelegtes Kapital durchschnittlich jährlich ein, d. h. das Kapital rentirt sich zu $15\frac{22897}{33408}$ % (Procent).

Die Antworten sind bei den einzelnen Berechnungen allenthalben gegeben.

Diese Berechnung diene als Muster, wie zusammengesetzte Aufgaben in der schriftlichen Bearbeitung dargestellt werden sollen, damit man über das Ganze eine klare Uebersicht gewinnen kann. — Der Lehrer halte die Schüler gleich anfangs, damit sie sich daran gewöhnen, zu einer bestimmten Ordnung an, die Alles deutlich überschauen läßt; denn gerade dadurch werden manche Fehler und Irrungen verhütet, die sich sonst nur zu leicht ergeben, wenn man Alles in- und untereinander schreibt. —

Zurückführen (Reduziren) untergeordneter Größen in übergeordnete.

1. Beispiel. 2388 Bogen Papier geben wie viel Buch?

Ansatz und Berechnung:

2388 Bogen $= {}^{2388}/_{24}$ Buch. — $24:2388 = 99^1/_2$ Buch.
216
—
-228
216
—
$-12/24 = {}^1/_2$

Antw. 2388 Bogen geben $99^1/_2$ Buch.

Die 2388 Bogen wurden dadurch in Buch reduzirt, daß man dieser Zahl die Reduktionszahl 24 zum Nenner gab; sodann wurden die Ganzen herausgezogen.

2. Beispiel. $793^3/_4$ Maß, wie viel Eimer?

Ansatz und Berechnung:

I. $793^3/_4$ Maß $= \frac{793^3/_4}{60} = {}^{3175}/_{240} = 13^{11}/_{48}$ Eim. $240:3175 = 13^{11}/_{48}$ Eim.
240
—
-775
720
—
$55/240 = {}^{11}/_{48}$.

Antwort: $793^3/_4$ Maß sind $13^{11}/_{48}$ Eimer.

II. $793^3/_4$ Mß. $= \frac{3175}{4 \times 60} = {}^{3175}/_{240} = 13^{55}/_{240} = 13^{11}/_{48}$ Eim.

III. $793^3/_4$ Maß $= \frac{793^3/_4}{60} = 60:793^3/_4 = \left|{}^{60}/_1\right| : {}^{3175}/_4 = {}^1/_{60} \times {}^{3175}/_4$ (635, 12)
$= {}^{635}/_{48} = 13^{11}/_{48}$ Eimer.

Bei I. wie bei dem 1. Beispiele; dann wurde der Doppelbruch aufgelös't und die Ganzen herausgezogen. Bei der II. Berechnung ist die Division dadurch vollzogen, daß man den Nenner des eingerichteten Bruches mit der Reduktionszahl (60) multiplizirte. Bei III. ist die Berechnung durch die gewöhnliche Division eines Bruches durch eine ganze Zahl ausgeführt worden.

3. Beispiel. 2805 Dreißiger, wie viel Schäffel?

Ansatz und Berechnung:

I. 2805 Drßgr. $= {}^{2805}/_{32}$ Mtz. $= 87^{21}/_{32}$ Mtz. — $32:2805 = 87^{21}/_{32}$ Mtz.
256
—
-245
224
—
21/32

$87^{21}/_{32}$ Mtz. $= \frac{87^{21}/_{32}}{6} = {}^{2805}/_{192} = 14^{39}/_{64}$ Schfl.

$192:2805 = 14^{39}/_{64}$ Schfl.
192
—
-885
768
—
$117/192 = {}^{39}/_{64}$

Antw. 2805 Dreißiger sind $14^{39}/_{64}$ Schfl.

II. 2805 Drßgr. $= \frac{2805}{32 \times 6} = {}^{2805}/_{192} = 14^{39}/_{64}$ Schfl.

III. 2805 Drßgr. $= {}^{2805}/_{192} = 14^{39}/_{64}$ Schfl. — 1 Schfl. = 6 Mtz. à 32 Drßgr. = 192 Drßgr.

Bei I. wurden die Drßgr. zuerst in Metzen, dann diese Mtz. in Schfl. verwandelt. Bei II. gab man der gegebenen Anzahl der Dreißiger die nöthigen Reduktionszahlen zu

Nennern. Bei III. erhielt die Zahl das Produkt der beiden Reduktionszahlen, d. i. die Reduktionszahl der Dreißiger auf Schäffel zum Nenner.

4. Beispiel. $839^2/_5$ Zoll, wie viel Ruthen (12theilig)?

I. $839^2/_5$ Zoll $= \frac{839^2/_5}{12} = {}^{4197}/_{60} = 69^{19}/_{20}$ Fuß. ($240 : 1399 = 5^{199}/_{240}$ Rth.)

1200

$199/240$

$69^{19}/_{20}$ Fuß $= \frac{69^{19}/_{20}}{12} = {}^{1399}/_{240} = 5^{199}/_{240}$ Rth.

II. $839^2/_5$ Zoll $= \frac{839^2/_5}{12 \times 12} = \frac{839^2/_5}{144} = {}^{4197}/_{720} = 5^{199}/_{240}$ Rth. —

($720 : 4179 = 5^{199}/_{240}$ Rth.)

3600

$-597/720 = {}^{199}/_{240}$.

III. $839^2/_5$ Zl. $= \frac{4197}{5 \times 12 \times 12}$ od. $\frac{4197}{5 \times 144} = {}^{4197}/_{720} = 5^{199}/_{240}$ Rth.

IV. $839^2/_5$ Zl. $= \frac{839^2/_5}{144} = 144 : 839^2/_5 = \left|\frac{144}{1}\right| : {}^{4197}/_5 = \frac{1}{\overset{48}{144}} \times \frac{\overset{1399}{4197}}{5} =$ ${}^{1399}/_{240} = 5^{199}/_{240}$ Ruthen.

Zu IV. Zu 1 Ruthe braucht man 144 Zoll; die Zoll werden also zu Ruthen gemacht, indem man mit 144 in $839^2/_5$ Zoll dividirt.

5. Beispiel. 83 ℔ 27 Lth. 3 Qt., wie viel Ztr.?

Ansatz und Berechnung:

I. 3 Qt. $= {}^3/_4$ Lth. — 27 Lth. $+ {}^3/_4$ Lth. $= 27^3/_4$ Lth. $83^{111}/_{128} = 128$

$27^3/_4$ Lth. $= \frac{27^3/_4}{32} = {}^{111}/_{128}$ ℔ — 83 ℔ $+ {}^{111}/_{128}$ ℔ $= 83^{111}/_{128}$ ℔.

$83^{111}/_{128}$ ℔ $= \frac{83^{111}/_{128}}{100}$ Ztr. $= {}^{10735}/_{12800} = {}^{2147}/_{2560}$ Ztr.

Nebenrechnungen:

128×83: 384, 1024, 10624, $+111$, 10735 Zähl.

128×100: 12800 Nenner.

II. 83 ℔ 27 Lth. 3 Qt. —
$\times 32$
193
249
2683 Lth.
$\times 4$
10735 Qt. $= {}^{10735}/_{12800}$ Ztr. $= {}^{2147}/_{2560}$ Ztr.

1 Ztr. = 100 ℔.
$\times 32$
3200 Lth.
$\times 4$
12800 Qt.

III. 10735 Qt. $= \frac{10735}{4 \times 32 \times 100} = {}^{10735}/_{12800} = {}^{2147}/_{2560}$ Ztr.

Bei I. wurde jede untergeordnete Größe in die nächst höhere zurückgeführt. Zu II. wurden die Pfd., Lth. u. Qt., dann der Zentner ebenfalls in Quint aufgelös't. Jene, (10735 Qt.) bilden den Zähler, diese (12800 Qt.) den Nenner des Bruches. Zu III. Hier wurden die betreffenden Reduktionszahlen als Nenner gesetzt.

6. Beispiel. 67 Wochen 19 Tage $16^2/_3$ Stunden, wie viel Jahre?

I. $16^2/_3$ Std. $= \frac{16^2/_3}{24} = {}^{50}/_{72} = {}^{25}/_{36}$ Tg. — 19 Tg. $+ {}^{25}/_{36}$ Tg. $= 19^{25}/_{36}$ Tg.

$19\,{}^{25}/_{36}$ Tg. $= \frac{19\,{}^{25}/_{36}}{7} = {}^{709}/_{252} = 2\,{}^{205}/_{252}$ Wch. — 67 W. + $2\,{}^{205}/_{252}$ W. = $69\,{}^{205}/_{252}$ Wch. — $69\,{}^{205}/_{252}$ Wch. $= \frac{69\,{}^{205}/_{252}}{52\,{}^{1}/_{7}} = {}^{123151}/_{91980} = 1\,{}^{31171}/_{91980} = 1\,{}^{4453}/_{13140}$ Jahre.

Oder: $69\,{}^{205}/_{252}$ Wch. $= 52\,{}^{1}/_{7} : 69\,{}^{205}/_{252} = \left|\frac{365}{7}\right| : {}^{17593}/_{252} = \frac{7}{365} \times \frac{17593}{252_{36}} = {}^{17593}/_{13140} = 1\,{}^{4453}/_{13140}$ Jahre.

Antw. 97 Wch. 19 Tg. $16\,{}^{2}/_{3}$ Std. sind $1\,{}^{4453}/_{13140}$ Jahre.

Oder man verwandelt die Wochen rc. in Drittelstunden; so auch ein Jahr.

II. 67 Wch. 19 Tg. $16\,{}^{2}/_{3}$ Std.	1 Jahr = 365 Tage
7	24
488 Tag	1460
24	730
1968	8760 Std.
976	3
$11728\,{}^{2}/_{3}$	26280 Drittelstd. (Renner).
3	
35186 Drittelstunden (Zähler).	
${}^{35186}/_{26280} = 1\,{}^{4453}/_{13140}$ J.	26280 : 35186 = $1\,{}^{4453}/_{13140}$ J.
	26280
	${}^{8906}/_{26280} = {}^{4453}/_{13140}$

III. ${}^{35186}/_{3}$ Std. $= \frac{35186}{3 \times 24 \times 365} = {}^{35186}/_{26280} = 1\,{}^{4453}/_{13140}$ Jahre.

Zu I. Da das Jahr $52\,{}^{1}/_{7}$ Woche hat, so ist mit $52\,{}^{1}/_{7}$ in $69\,{}^{205}/_{252}$ Wochen zu dividiren. Das Uebrige ist aus dem Vorhergehenden bekannt. II. oder III. ist das Ueblichere.

Aufgaben.

1. 9 Klafter Holz gelten $127\,{}^{4}/_{5}$ fl.; wie hoch kommt 1 Klafter?
2. Ein Melber kaufte 16 Schfl. Korn und bezahlte dafür $321\,{}^{3}/_{4}$ fl.; wie hoch kommt ihm 1 Schfl.?
3. Wie oft ist 37 in $895\,{}^{13}/_{15}$ enthalten?
4. Jemand kauft ein Haus um 10,000 fl. und bezahlt es mit Kronenthalern à $2\,{}^{7}/_{10}$ fl.; wie viel waren es?
5. Ein Kaufmann bezahlte für $13\,{}^{7}/_{8}$ Ztr. Kaffee 518 fl.; wie hoch ist der Zentner berechnet?
6. Ein Wachszieher verfertigt ${}^{5}/_{16}$ Pfd. schwere Wachskerzen; wie viel Stück wird er aus 1 Ztr. $57\,{}^{3}/_{4}$ ℔ Wachs erhalten?
7. Ein Guldenstück wiegt etwa ${}^{3}/_{5}$ Loth; wie viele solche Guldenstücke gehen dann auf 8 ℔ $27\,{}^{5}/_{6}$ Loth?
8. ${}^{27}/_{32}$ von einer Schuld beträgt $723\,{}^{3}/_{5}$ fl.; wie groß ist die ganze Schuld?
9. Wie oft ist $2\,{}^{7}/_{9}$ in ${}^{13}/_{16}$ enthalten? und umgekehrt?
10. $7\,{}^{3}/_{4}$ Loth Gewürz gelten ${}^{13}/_{15}$ fl.; wie hoch kommt 1 Loth?
11. Ein Krämer gewann an $14\,{}^{2}/_{3}$ Ellen Band ${}^{29}/_{32}$ fl.; wie groß war der Gewinn an 1 Elle?
12. Ein Buchdrucker erhält $9\,{}^{3}/_{4}$ Ballen Druckpapier und bezahlt dafür $163\,{}^{4}/_{5}$ fl.; was bezahlt er für 1 Ballen?
13. Auf der Eisenbahn legt man die Entfernung von München nach Augsburg zu $8\,{}^{7}/_{16}$ Meilen gewöhnlich in $2\,{}^{1}/_{5}$ Stunden zurück; wie viele Meilen legt man in 1 Stunde zurück?
14. Wenn $23\,{}^{4}/_{5}$ Loth Gold $674\,{}^{1}/_{3}$ fl. werth sind; welchen Werth hat dann 1 Loth Gold?

15. Wenn $16^7/_8$ Eimer Wein $986^{11}/_{32}$ fl. gelten, wie hoch kann der Eimer verkauft werden?

16. Wenn man in einer Wirthschaft wöchentlich $29^7/_{16}$ Pfd. Sago verbraucht, wie lange wird man mit 17 Ztr. $83^{11}/_{15}$ Pfd. ausreichen?

17. 7 Ellen Tuch bezahlt man mit $25^{13}/_{20}$ fl.; was hat man für $56^2/_3$ Ellen zu bezahlen?

18. $^8/_{15}$ Ztr. Zucker kauft man um $17^2/_3$ fl.; was hat man für $37^3/_4$ Ztr. zu bezahlen?

19. Ein Reisender legte in $8^3/_5$ Tagen $47^1/_3$ Meilen Wegs zurück; wie viele Meilen wird er in $3^5/_6$ Tagen zurücklegen?

20. Für $13^5/_6$ Ztr. mußte Jemand $187^{14}/_{15}$ fl. Fracht bezahlen; wie viel wird man für $47^2/_3$ Ztr. bezahlen müssen?

21. Reduzire in Gulden a) 57 kr. 3 pf., b) 46 kr. 3 pf. 1 hl., c) 37 kr. 1 pf. 1 hl., d) 26 kr. 2 pf. $1^1/_3$ hl.!

22. Wie heißen a) 26 ℔ 22 Lth. 2 Qnt., b) 77 ℔ 13 Lth. 3 Qt., c) 48 ℔ $17^1/_2$ Lth., d) 2 Ztr. 67 ℔ 13 Lth. $2^2/_5$ Qt. je in Zentner ausgedrückt?

23. Wasfür Brüche in Schäffel ausgedrückt, ergeben sich aus: a) 4 Mtz. 1 Vrlg. 4 Drßgr., b) 3 Mtz. 1 Vrlg. 7 Drßgr., c) 5 Mtz. 3 Vrlg. $3^3/_4$ Dgßr., d) 7 Schfl. 2 Mtz. 3 Vrlg. $5^5/_6$ Drßgr.?

24. Führe in Brüche eines Jahres zurück: a) 6 Monate 27 Tage 16 Stunden; b) 265 Tage 21 Stunden 45 Minuten; c) 73 Wochen 4 Tg. 17 Std. $37^1/_2$ Minuten; d) 38 Wochen 5 Tage 15 Stunden $44^2/_5$ Minuten?

Gemischte Aufgaben zur Uebung und Wiederholung der vier Rechnungsarten in Brüchen.

1. Ein Oekonom kaufte sechs an sein Besitzthum angrenzende Aecker; a) mit $3^1/_2$ Tagwerke zu $918^3/_4$ fl., b) mit $2^4/_5$ Tgw. zu $706^2/_5$ fl., c) mit $4^2/_3$ Tgw. zu $1177^1/_3$ fl., d) mit $1^5/_6$ Tagw. zu $439^1/_{12}$ fl., e) mit $5^3/_4$ Tgw. zu $1422^1/_6$ fl. und f) mit $3^7/_{10}$ Tgw. zu $980^1/_2$ fl. Wie viel Tagwerke hat er im Ganzen angekauft? und wie hoch kamen ihn diese Aecker zu stehen?

2. Drei Bauernhöfe wurden verkauft, wovon A sammt den Nebenauslagen auf $13709^7/_8$ fl., B auf $20841^3/_5$ fl. und C auf $27040^2/_3$ fl. zu stehen kam. Wie viel hat jeder mehr oder weniger gekostet, als jeder der andern?

3. Für die Bewohner eines abgebrannten Ortes wurde in den 8 Regierungsbezirken Bayerns eine Kollekte veranstaltet. Das Ergebniß war: Oberbayern $4398^1/_2$ fl.; Niederbayern $2957^3/_5$ fl.; Pfalz $4506^7/_8$ fl.; Oberpfalz $3167^2/_3$ fl.; Oberfranken $3977^5/_6$ fl.; Mittelfranken $3721^{13}/_{15}$ fl.; Unterfranken $4199^3/_4$ fl.; Schwaben und Neuburg $5367^{17}/_{20}$ fl. a) Wie viel erhielten die Verunglückten? b) Welcher Regierungsbezirk hat am meisten beigesteuert? und wie viel mehr, als jeder der anderen? c) Wie viel mehr oder weniger der erste als der zweite? der 2te als der 3te? der 3te als der 4te ꝛc.

4. A schuldete an B $384^1/_2$ fl., die er nach und nach abzuzahlen versprach. Er zahlte nun im Jänner $27^2/_3$ fl., im Februar $43^5/_8$ fl., im März $36^1/_5$ fl., im April $19^5/_6$ fl., im Mai $47^3/_4$ fl., und im Juni $73^9/_{10}$ fl.; wie viel blieb er nach jeder Zahlung schuldig? wie viel ist er noch schuldig? und wie viel hat er im Ganzen an der Schuld abgezahlt?

5. N legte 1000 fl. in die Sparkasse seines Ortes. Im ersten Jahre nahm er aber wieder $174^7/_8$ fl. zurück, legte jedoch am Ende des Jahres wieder $69^2/_3$ fl. hinein. Im 2ten Jahre nahm er $87^4/_5$ fl. heraus, legte aber im letzten Monate wieder $133^5/_6$ fl. hinein. Im 3ten Jahre nahm er $73^3/_4$ fl. zurück, und legte dagegen am Ende des Jahres wieder $156^{11}/_{12}$ fl. hinein. a) Wie groß war der Bestand des Kapitals am Ende jedes Jahres? b) Wie viel betrugen die Ausgaben, wie viel die Einlagen, in den drei Jahren zusammen?

6. Ein Kaufmann verkaufte $^5/_8$ von einem Stück Tuch, das 76 Ellen mißt, die Elle zu $3^4/_5$ fl. Von einem zweiten Stücke, das $65^1/_3$ Ellen maß, verkaufte er $^4/_7$, die Elle zu $4^5/_6$ fl. a) Wie viel Ellen verkaufte er von jedem Stücke? und wie viel behielt er übrig? b) Wie viel Geld hat er im Ganzen eingenommen? c) Wie viel Geld hat er für das verkaufte Tuch der ersten Sorte mehr eingenommen, als für das der zweiten?

7. Jemand hat 4 Kapitale ausstehen, a) zu 80 fl. (= $^4/_5$ Hundert), b) zu 725 fl. (= $7^1/_4$ Hundert), c) zu 1200 fl. (= 12 Hundert) und d) zu 2775 fl. (= $27^3/_4$ Hundert).

Wenn er nun für 100 fl. (= 1 Hundert) $4\frac{2}{3}$ fl. Zinsen bekommt, a) wie viel Zinsen bringt ihm jährlich jedes Kapital? b) wie viel Zinsen alle zusammen? c) Wie viel betragen die Zinsen vom letzten Kapital a) in 5, b) in $6\frac{5}{8}$ Jahren?

8. a) Wie viel Kreuzer, Pfenninge und Heller geben $\frac{17}{32}$ fl., $\frac{25}{48}$ fl., $\frac{67}{92}$ fl., $\frac{53}{55}$ fl., $\frac{77}{125}$ fl.? b) Wie viel Pfund, Loth und Quint geben $\frac{7}{12}$ Ztr., $\frac{13}{15}$ Ztr., $\frac{8}{9}$ Ztr., $\frac{25}{32}$ Ztr., $\frac{41}{93}$ Ztr. c) Wie viel Quadrat-Fuß, □Zoll, □Linien geben $\frac{7}{16}$ Quadrat-Ruthen, $\frac{13}{15}$□°, $\frac{21}{32}$□°, $\frac{5}{7}$□°, $\frac{21}{25}$□°, $\frac{37}{87}$□°? [12 und 10-theilig].

9. a) 4 Metzen 24 Dreißiger; — 3 Mtz. $17\frac{1}{2}$ Drßgr.; — 5 Mtz. 2 Vrlg. $6\frac{2}{3}$ Drßgr.; wasfür Theile eines Schäffels sind es? b) 26 Loth $2\frac{1}{2}$ Quint; — 37 ℔ 16 Loth.; — 78 ℔ 22 Lth. 2 Qt.; — 92 ℔ 27 Lth. $1\frac{5}{8}$ Qt. — führe in Brüche eines Pfundes — eines Zentners zurück! c) 7 Monate 15 Tage; — 8 Mt. $13\frac{1}{3}$ Tg.; — 11 Mt. 18 Tg. 16 Stunden; — 5 Mt. 26 Tg. $17\frac{1}{2}$ Std; 273 Tg. 21 Std. $17\frac{1}{7}$ Minuten reduzire in Brüche eines Jahres!

10. 7 Frauen kaufen mit einander: a) $138\frac{1}{2}$ Ellen Leinwand, b) $88\frac{2}{3}$ ℔ Zucker, c) $72\frac{4}{5}$ ℔ Kaffee und d) $97\frac{3}{8}$ ℔ Schmalz; wie viel erhält jede von jeder Waare?

11. $\frac{5}{7}$ Schfl. Kern gelten $13\frac{3}{4}$ fl.; wie hoch kommen a) 1 Schfl., b) 6 Schfl., c) $\frac{2}{3}$ Schfl d) $2\frac{1}{2}$ Schfl., e) $9\frac{3}{5}$ Schfl., f) $27\frac{7}{8}$ Schfl.?

12. $2\frac{2}{3}$ Ztr. Zucker kauft man um $94\frac{4}{5}$ fl.; was hat man zu bezahlen a) für 1 Ztr., b) für 9 Ztr., c) für $\frac{3}{4}$ Ztr., d) für $1\frac{5}{6}$ Ztr., e) für $7\frac{5}{8}$ Ztr., f) für $29\frac{11}{12}$ Ztr.?

13. $\frac{3}{5}$ Ztr. einer Waare gelten 29 fl. 48 kr.; a) wie hoch wird 1 Ztr, b) wie hoch werden 7 Ztr., c) $4\frac{5}{6}$ Ztr., d) $17\frac{3}{16}$ Ztr. zu stehen kommen?

14. $2\frac{2}{3}$ Metzen Gerste kauft man um 6 fl. 36 kr.; was hat man zu bezahlen für a) 1 Metzen, b) für 5 Mtz., c) für 2 Schfl. 4 Mtz. d) für 5 Schfl. $4\frac{5}{6}$ Mtz.?

15. Ein Bäcker kommt zur Schranne und hat $547\frac{11}{15}$ fl. bei sich. Wenn das Schfl. Getreide nun $17\frac{5}{8}$ fl. gilt; wie viel Schfl. Getreide kann er kaufen?

16. Ein Bauer fuhr im verflossenen Jahre 12mal in die Schranne und verkaufte da: a) $9\frac{4}{5}$ Schfl., b) $13\frac{2}{3}$ Schfl., c) $8\frac{7}{16}$ Schfl., d) $15\frac{17}{20}$ Schfl., e) $7\frac{13}{15}$ Schfl., f) $10\frac{13}{14}$ Schfl., g) $8\frac{5}{9}$ Schfl., h) $12\frac{7}{12}$ Schfl., i) $6\frac{13}{16}$ Schfl., k) $7\frac{23}{45}$ Schfl., l) $19\frac{6}{7}$ Schfl. und m) $15\frac{37}{42}$ Schfl. Getreide. Er lös'te im Durchschnitt für das Schäffel $14\frac{2}{5}$ fl. Es fragt sich: I. Wie viel Schfl. Getreide brachte er im Ganzen zu Markte? II. Was hat er im Ganzen eingenommen? III. Von diesem Gelde kaufte er sich einen Acker, der 4 Tagwerke 60 Dezimale oder $4\frac{3}{5}$ Tagwerke hält, um die Summe von $1313\frac{7}{8}$ fl.; wie viel Geld blieb ihm noch übrig? IV. Wie viel hat er für das Tagwerk Acker bezahlt?

17. Jemand nahm ein: a) $137\frac{5}{8}$ fl., b) $259\frac{1}{6}$ fl., c) $78\frac{2}{3}$ fl, d) $417\frac{4}{5}$ fl., e) $88\frac{7}{12}$ fl. und f) $107\frac{3}{4}$ fl. Von dieser Einnahme verausgabte er $376\frac{2}{15}$ fl., und von dem Reste noch weiter $3\frac{3}{5}$mal $39\frac{5}{6}$ fl. I. Wie viel blieb ihm endlich noch übrig? II. Wenn er diesen Rest in prß. Thlr. à $1\frac{3}{4}$ fl. auswechseln lassen will, wie viele prß. Thlr. wird er erhalten?

18. Ein Krämer mischt 1 ℔ Kaffee zu $43\frac{1}{2}$ kr., 1 ℔ zu $34\frac{3}{4}$ kr., 1 ℔ zu $26\frac{2}{3}$ kr. und 1 ℔ zu $22\frac{5}{6}$ kr.; welchen Werth hat 1 ℔ dieses gemischten Kaffees?

19. Ein Getreidehändler hat Kern zu verschiedenen Preisen gekauft, nämlich 24 Schäffel à $13\frac{23}{24}$ fl., $30\frac{5}{6}$ Schfl. à $13\frac{4}{5}$ fl., $27\frac{3}{4}$ Schfl. à $16\frac{1}{2}$ fl., und $39\frac{2}{3}$ Schfl. à $22\frac{1}{2}$ fl. Wenn der Getreidehändler alle diese Sorten zusammen mischt, welchen Werth hat dann 1 Schäffel der Mischung?

20 7 Haupt-Erben machen eine Erbschaft von $53895\frac{4}{5}$ fl. A hat kein Kind, B hat 1, C 2, D 3, E 5, F 7 und G 9 Kinder. Wie groß ist der Antheil jedes Haupt-Erben? und wie groß der Antheil jedes Kindes der Haupt-Erben, wenn der Vater stets einen gleichen Kindestheil sich vorbehält?

21. In eine Restauration wurden geliefert 7 Ztr. 68 Pfd. Kaffee; 13 Ztr. 75 Pfd. Zucker; 9 Ztr. 47 Pfd. Reiß und 15 Ztr. 87 Pfd. Käse. Kaffee wird täglich verbraucht $2\frac{3}{4}$ ℔; Zucker täglich $5\frac{7}{12}$ ℔; Reiß wochentlich $17\frac{1}{5}$ ℔ und Käse wochentlich $27\frac{13}{14}$ ℔; wie lange reicht man mit jeder Sorte aus?

22. Theile mit $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$, mit $\frac{5}{8}$ in $\frac{13}{15}$, mit $\frac{5}{6}$ in $3\frac{4}{5}$, mit $\frac{7}{12}$ in $16\frac{7}{9}$ und ziehe jedesmal $\frac{1}{9}$ ab; was bleibt stets zum Rest?

23. Wasfür eine Zahl entsteht, wenn man a) mit $7\frac{1}{5}$ in 247, b) mit $18\frac{5}{6}$ in 593, c) mit $23\frac{1}{3}$ in $491\frac{1}{2}$, d) mit $31\frac{5}{9}$ in $762\frac{5}{8}$ dividirt und jedesmal $47\frac{5}{7}$ dazu zählt?

24. Welche Zahl kommt heraus, wenn man $96\frac{5}{8}$ mit $42\frac{2}{3}$ vervielfacht, das Produkt mit $18\frac{4}{5}$ dividirt und vom Quotienten $598\frac{11}{12}$ abzieht?

25. Welche Zahl ergibt sich, wenn man $7\frac{3}{4}$mal $59\frac{5}{6}$ von $37\frac{1}{5}$mal $64\frac{5}{6}$ abzieht und den Rest durch $26\frac{3}{5}$ dividirt?

26. A hat 3 Schuldposten: a) zu $1466\frac{2}{3}$ fl.; b) zu $2738\frac{4}{5}$ fl. und c) zu $3895\frac{13}{16}$ fl. Die Schuld a) bezahlt er mit preuß. Thalern à $1\frac{3}{4}$ fl.; Schuld b) mit bayerischen (Conventions=) Thalern à $2\frac{2}{5}$ fl., und Schuld c) mit Kronenthalern. a) Wie viel hat er von jeder Sorte nöthig? b) Wie groß ist die Schuld im Ganzen? c) Wenn die ganze Schuld mit französischen Thalern (5 Frankenstücken) à $2\frac{1}{3}$ fl. abgetragen werden wollte, wie viele wären erforderlich?

27. Z hat drei Obligationen, a) zu 1780 fl., b) zu $2116\frac{4}{5}$ fl. und c) zu $1488\frac{3}{8}$ fl., die er bei einem Geldwechsler in klingende Münze umsetzen lassen will. Z stellt es dem Wechselherrn frei, ihm die Obligationen entweder in österreichischen Gulden à $1\frac{1}{5}$ fl., oder in preuß. Thalern à $1\frac{3}{4}$ fl., oder in altsächsischen Thalern à $1\frac{4}{5}$ fl., oder in französ. (5 Francs=) Thalern à $2\frac{1}{3}$ fl., oder in bayerischen (Conventions=) Thalern à $2\frac{2}{5}$ fl., oder in Kronenthalern à $2\frac{7}{10}$ fl., oder auch in bayer. Dukaten à $5\frac{3}{5}$ fl. — auszuwechseln. Wie viele Stücke von der einen und den andern Münzsorten wären für jede Obligation einzeln erforderlich?

28. Ein Kaufmann erhält 4 Ballen Tuch: A mißt $57\frac{3}{4}$ Ellen, B $69\frac{4}{5}$ Ellen, C $83\frac{1}{6}$ Ellen und D $121\frac{2}{3}$ Ellen. Die Elle ist ihm berechnet von A zu $3\frac{7}{12}$ fl., von B zu $4\frac{2}{3}$ fl., von C zu $2\frac{4}{5}$ fl. und von D zu $5\frac{3}{8}$ fl. 1tens: Wie viele Ellen hat er im Ganzen erhalten? 2tens: Wie viel von jeder folgenden Sorte mehr, als von der vorhergehenden? 3tens: Wie viel hat er für das Tuch zu zahlen? 4tens: Wenn er $\frac{1}{3}$ der Schuld sogleich, dann einige Zeit darnach $\frac{5}{8}$ des Restes bezahlt; mit wie viel bleibt er noch im Rückstande?

29. Ein Weinwirth hat a) 4 Eimer Wein à $37\frac{4}{5}$ fl., b) $7\frac{1}{2}$ Eim. à $43\frac{3}{4}$ fl., c) $5\frac{2}{3}$ Eimer à $57\frac{1}{2}$ fl., und d) $6\frac{5}{8}$ Eimer à $76\frac{4}{5}$ fl. Erstens: Wie viel Eimer Wein sind es im Ganzen? Zweitens: Welchen Werth hat der Wein? Drittens: Welches ist der durchschnittliche Werth 1 Eimers? Viertens: Wenn er von A $2\frac{5}{8}$ Eimer, von B $3\frac{1}{2}$ Eimer, von C $3\frac{1}{4}$ Eimer und von D $1\frac{2}{3}$ Eimer Wein verkauft, wie viel Wein blieb ihm von jeder Sorte noch übrig? wie viel Geld nahm er dafür ein? und wie viel ist der Rest des Weines noch werth?

30. Wie heißt die Zahl, die man erhält, wenn man den Unterschied zwischen $8\frac{2}{3}$ und $37\frac{4}{5}$ durch $5\frac{3}{7}$ dividirt, zum Quotienten $2\frac{5}{6}$mal $7\frac{5}{8}$ addirt und diese Summe mit $\frac{5}{9}$ multiplicirt?

31. Dividire mit 3 die Zahl 16, den Quotus nimm 8mal und dividire sodann das Produkt mit 4. Setze zu dem gefundenen Quotienten $6\frac{5}{21}$ und $4\frac{2}{21}$ hinzu, das Gefundene nimm $2\frac{1}{5}$mal. Gib hierauf hinweg 7mal $2\frac{6}{7}$, und ferner $1\frac{1}{2}$mal $4\frac{2}{15}$. Den Rest theile durch $1\frac{1}{4}$. Was für eine Zahl ist aus deiner angenommenen Zahl 16 geworden?

32. Ein Hausbesitzer hat 8 Wohnungen, die er vermiethet: A gibt jährlich $76\frac{3}{5}$ fl., B $52\frac{2}{5}$ fl., C $87\frac{7}{8}$ fl., D $93\frac{1}{2}$ fl., E $127\frac{5}{6}$ fl., F $68\frac{2}{3}$ fl., G $114\frac{7}{12}$ fl. und H $139\frac{14}{15}$ fl. Miethzins. Aus dieser Einnahme bestreitet er die jährlichen Abgaben mit $36\frac{3}{8}$ fl. und die Ausbesserungskosten mit $113\frac{3}{5}$ fl. Von dem Reste braucht er monatlich $37\frac{3}{5}$ fl. zu seinem Lebensunterhalte und das Uebrige verwendet er auf Pacht=Gründe. Es frägt sich nun erstens: Wie groß ist seine jährliche Einnahme? Zweitens: Was bleibt ihm über die Ausgaben auf Abgaben und Ausbesserungskosten? Drittens: Wie viel bedarf er jährlich zu seinem Lebensunterhalte? Viertens: Wie viel verwendet er auf die Pachtgründe? Fünftens: Wie viele Tagwerk Gründe hat er gepachtet, wenn er für das Tagwerk durchschnittlich 12 $\frac{31}{80}$ fl. Pacht bezahlt?

33. Ein Oekonom verkaufte $11\frac{1}{3}$ Schfl. Kern, à Schfl. $18\frac{3}{5}$ fl., $20\frac{2}{5}$ Schfl. Kern, à Schfl. $21\frac{1}{4}$ fl. und $14\frac{1}{10}$ Schfl. Kern, à Schfl. $19\frac{2}{3}$ fl. a) Wie viel Schfl. hat er im Ganzen verkauft? b) Wie viel hat er für sein Getreide erlöset? c) Wenn er von dem erlös'ten Gelde $337\frac{23}{30}$ fl. ausgibt, was bleibt ihm noch? d) Den Rest verwendet er zum Ankauf von Kühen; wie viel Kühe kann er sich anschaffen, wenn er durchschnittlich das Stück für $72\frac{47}{48}$ fl. ankauft?

34. Ein Kaufmann erhält $3\frac{2}{3}$ Ballen blaues Tuch, und es mißt die Balle $36\frac{3}{5}$ Ellen; $\frac{4}{9}$mal weniger schwarzes Tuch; $1\frac{1}{8}$mal so viel grünes Tuch, als schwarzes, und $1\frac{2}{3}$mal mehr graues Tuch, als grünes. Vom blauen Tuche gilt die Elle $4\frac{1}{6}$ fl., vom schwarzen $3\frac{3}{5}$ fl., vom grünen $5\frac{3}{11}$ fl. und vom grauen $2\frac{5}{8}$ fl. — Es fragt sich: a) Wie viel Tuch erhielt er im Ganzen? b) wie hoch kommt ihm das Tuch zu stehen? c) was bleibt er schuldig,

wenn er sogleich baar $889^7/_{24}$ fl. abzahlt, und d) was hat er jedesmal an dem Reste zu zahlen, wenn er denselben in 5 Vierteljahrs-Terminen abführen darf?

35. 4 Männer treiben ein Geschäft zu gemeinschaftlichem Gewinn und Verlust 6 Jahre lang. Sie gewinnen im ersten Jahre $684^3/_5$ fl.; im zweiten $3^3/_4$mal so viel; im dritten verlieren sie $^4/_5$ des in den beiden frühern Jahren gewonnenen Geldes; im vierten gewinnen sie das $8^5/_9$fache des in den drei verflossenen Jahren Gewonnenen; im fünften gewinnen sie im Durchschnitt täglich $5^3/_5$ fl., und im sechsten verlieren sie $^2/_9$ des in den 5 ersten Jahren überhaupt gewonnenen Geldes. Wie viel haben sie in den sechs Jahren überhaupt gewonnen oder verloren? wie viel durchschnittlich in jedem Jahre? und wie viel erhält oder bezahlt jeder bei der nunmehr erfolgenden Auseinandersetzung?

36. Zähle zusammen; a) 21 fl. 36 kr. $5^2/_3$ hl., b) 16 fl. 57 kr. $7^1/_2$ hl., c) 33 fl. 21 kr. $2^5/_6$ hl., d) 19 fl. 7 kr. $4^4/_5$ hl., e) 45 fl. 47 kr. $6^3/_4$ hl., und f) 7 fl. 43 kr. $1^7/_8$ hl.; ziehe von der Summe 71 fl. 40 kr. $6^{27}/_{40}$ hl. ab, und reduzire die verbleibenden Kreuzer und Heller in einen Guldenbruch. Den Rest multiplizire sodann mit $7^1/_9$ und dividire das Produkt mit $16^2/_3$; wie viele Gulden gibt es dann?

37. Fünf Wirthe bestellen zusammen folgende Weine: A $15^3/_5$ Eimer Rheinwein à $35^2/_3$ fl., B $2^3/_4$mal so viel Würzburger, à Eimer $27^7/_9$ fl., C $17^2/_3$ Eim. Deidesheimer à $38^5/_8$ fl., und D $^3/_8$ weniger als von C Affenthaler, à Eim. $44^2/_5$ fl. — Wie viel Eimer haben sie im Ganzen bestellt? Was kostet jede Sorte? was aller Wein? — Wenn sogleich $987^{31}/_{40}$ fl. bezahlt wird, was bleiben die Wirthe noch schuldig? — Wenn sie an dem Reste jedes Mal $386^7/_{12}$ fl. zahlen, wie oft haben sie zu zahlen? — Wie viele Eimer Wein erhält jeder Wirth von jeder Sorte? und im Ganzen? —

38. Eine Frau kaufte $97^1/_2$ Ellen Leinwand à $34^3/_4$ kr. Daraus ließ sie Hemden machen, wofür zu jedem $3^3/_4$ Ellen nöthig waren. a) Was mußte sie für die Leinwand bezahlen? b) Wie viele Hemden konnten aus der Leinwand gefertigt werden? und c) wie hoch kam das Hemd zu stehen, wenn für Nähen eines Hemdes $22^1/_2$ kr. bezahlt wird?

39. Ein Knecht dingte sich als Jahreslohn $36^4/_5$ fl. an Geld, dann ein Paar Stiefel, angeschlagen zu 5 fl. 40 kr., zwei neue Hemden à 1 fl. 50 kr., und drei neue Schürzen à 30 kr. Nachdem er $^3/_4$ Jahre gedient, $7^3/_8$ fl. baar, dann die Hemden und 1 Schürze empfangen hatte, tritt er aus dem Dienst. Wie viel hat er noch gut — Alles in Geld angeschlagen?

40. Eine Ferienaufgabe für wackere Rechner!

(Aus: Praktisches Rechenbuch von Diesterweg.)

Addire $15^7/_8 + 16^5/_6 + 17^8/_9 + 18^{13}/_{14} + 19^{19}/_{20} + 20^{31}/_{32}$; davon subtrahirt: $(13^2/_3 + 14^5/_7 + 12^3/_8 + 39^{11}/_{12} + 11^{10}/_{11})$; den Rest multiplizirt mit $10^{113}/_{184}$mal $7^2/_3$; das Produkt dividirt durch $82^{294121}/_{739200}$! Die Antwort besteht aus einer zweizifferigen ganzen Zahl, die zwischen 15 und 20 liegt, und einem Bruche, dessen Zähler sowol als der Nenner einzifferig ist.

Bemerkung. Daß die meisten dieser gemischten Aufgaben sich nur für geübtere, denkende Schüler eignen, versteht sich wol von selbst.

Das Rechnen mit Dezimalbrüchen.

Vorbegriffe.

1. Das Zehner-, Dezimal- oder das dekadische Zahlensystem.

Bekanntlich haben wir in unserm Zahlensystem nur zehn Ziffern,*) nämlich 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0; und dennoch ist es möglich, jede vorkommende Zahl jedes Umfanges durch diese wenigen Ziffern darzustellen und zu bezeichnen. Der Grund hievon liegt darin, weil man jedem Zahlzeichen nicht nur *seiner Figur nach*, sondern auch *seiner Stellung nach*, die es in einer Zifferreihe einnimmt, einen bestimmten Zahlenwerth beigelegt hat. Die *Figur* ist unveränderlich, die *Stellung* aber veränderlich. Betrachten wir z. B. die Zahl 1111! Die Figur der Zahlzeichen ist viermal dieselbe; aber die Stelle, welche jedes Zahlzeichen einnimmt, ist jedes Mal eine andere. Auf der ersten Stelle von rechts nach links bezeichnet die Ziffer 1 die Zahl *eins* oder eine *Einheit*; auf der zweiten Stelle bedeutet dieselbe Ziffer das Zehnfache, also zehnmal *eins* oder einen *Zehner*; auf der dritten Stelle das Zehnfache der vorhergehenden Stelle, also zehnmal einen Zehner oder *einhundert*; auf der vierten Stelle das Zehnfache der vorhergehenden 1 der dritten Stelle, also zehnmal einhundert oder *eintausend*. Ebenso die Zahl 3333! Von rechts nach links — bezeichnet 3 auf der ersten Stelle drei (drei Einheiten — dreimal eins); auf der zweiten Stelle zehnmal drei (drei Zehner) oder dreißig; auf der dritten Stelle, zehnmal drei Zehner oder zehnmal dreißig oder dreihundert, und auf der vierten Stelle zehnmal dreihundert oder dreitausend. Daraus sehen wir, daß nach unserm Zahlensystem jede Ziffer in ihrem Werthe, so oft sie in einer Zifferreihe um eine Stelle von *rechts nach links* vorschreitet, stets um das Zehnfache des Werthes auf vorhergehender Stelle zunimmt, und von *links nach rechts* mit jeder Stelle, die sie nach *rechts* zurückrückt, um das Zehnfache abnimmt oder nur den zehnten Theil ihres Werthes auf der nächst vorhergehenden Stelle bezeichnet. Darum nennt man denn auch diese Anordnung das *Zehner-* oder *Dezimalsystem*, oder auch das *dekadische Zahlensystem*.

2. Begriff, Entstehung und schriftliche Darstellung der Dezimalbrüche.

Mit der Einer- oder Einheitstelle ist zwar die Grenze erreicht, wodurch nach abwärts noch *ganze Zahlen*, nicht aber *Zahlen überhaupt*, bezeichnet werden können. Wie man aufwärts die Zahlen von der Einheit aus in's Unendliche fortführen kann, so kann dieses auch abwärts von

*) Eigentlich haben wir nur neun Ziffern; denn die Null (0) bezeichnet an und für sich keine Zahl, sondern dient nur, um ein Zahlzeichen auf eine höhere oder mindere Stelle zu rücken.

der Einheit an ganz nach demselben Zahlensysteme geschehen. Auch hier bedeutet jede Ziffer mit jeder Stelle, die sie weiter nach rechts hinabrückt, stets nur den zehnten Theil des Werthes, den sie auf der nächst vorhergehenden Stelle bezeichnet hat. Die Stellen von den Einern an nach rechts heißen Dezimalstellen, und es bedeutet eine Ziffer auf der ersten Stelle nach den Einern — Zehntel, auf der zweiten — Hundertel, auf der dritten — Tausendtel, auf der vierten — Zehntausendtel u. s. w. Die Zehntel, Hundertel, Tausendtel rc., die man in dieser Weise nach dem Dezimalsystem erhält, sind aber keine Ganzen mehr, sondern gebrochene Zahlen oder Brüche, und heißen darum, und weil sie zum Nenner nur 10, 100, 1000, überhaupt ein Produkt aus 10 haben können, **Dezimalbrüche.** Dezimalbrüche sind also solche Brüche, deren Nenner 10, oder 10mal 10, oder 10. 10. 10, überhaupt Potenzen *) von 10 sind. Demnach sind $^{7}/_{10}$, $^{53}/_{100}$, $^{69}/_{1000}$, $^{9}/_{1000}$ Dezimalbrüche.

Bei den Dezimalbrüchen werden jedoch die Nenner nicht angeschrieben, was auch nicht nöthig ist; denn wie man aus der Stelle, die eine Ziffer in einer Zahlenreihe bei ganzen Zahlen einnimmt, erkennen kann, ob sie Einer, Zehner, Hunderter rc. bezeichnet: so muß auch, da die Dezimalbrüche in Hinsicht ihrer Bezeichnung mit unserm Zahlensystem denselben Gesetzen unterworfen sind, und nach der obigen Erklärung leicht erkannt werden können, ob eine Ziffer in einem Dezimalbruche Zehntel, Hundertel, Tausendtel rc. bezeichne; darum werden also nur die Zähler solcher Brüche, und zwar wie ganze Zahlen angeschrieben. Um aber anzuzeigen, daß diese Zahlen keine Ganzen, sondern Brüche sind, so setzt man linker Hand der ersten Dezimalstelle (vor die Zehntel) ein Komma, Dezimalkomma genannt, und, wenn mit einem Bruche keine Ganzen verbunden sind (der Bruch keine gemischte Zahl ist), vor das Dezimalkomma links eine Null, um anzuzeigen, daß keine Ganzen vorhanden sind. Stehen mit dem Bruche noch Ganze in Verbindung, so setzt man diese links vor das Decimalkomma statt einer Null. Auf der linken Seite dieses Komma stehen also ganze Zahlen und rechts gebrochene Zahlen oder Brüche. Z. B. die Brüche a) $^{3}/_{10}$, b) $^{47}/_{106}$, c) $2^{351}/_{1000}$, d) $85^{79}/_{100}$ werden geschrieben: a) 0,3; b) 0,47; c) 2,351; d) 85,79. — Um die Ganzen und die Bruchzahlen noch deutlicher zu unterscheiden, trennt man diese manchmal nicht bloß durch das Decimalkomma, sondern es werden auch noch die Bruch-Decimalzahlen mit kleinern Ziffern geschrieben, wie z. B. obige Brüche: a) $0,_{3}$; b) $0,_{47}$; c) $2,_{351}$; d) $85,_{79}$.

Gelesen werden die Decimalbrüche gewöhnlich wie die gemeinen Brüche, z. B. vorstehende Brüche: a) drei Zehntel, b) 47 Hundertel, c) zwei Ganze und 351 Tausendtel rc. Doch lies't Mancher auch z. B. c) 2 Ganze, 3 Zehntel, 5 Hundertel, 1 Tausendtel; wol auch z. B. d) kurzweg: 85, Komma 79.

*) Unter Potenz (Zahlstufe) versteht man ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren. Eine jede Zahl wird in dieser Beziehung als 1te Potenz oder Potenz des ersten Grades betrachtet; mit sich selbst multiplizirt, wird sie dann zur 2ten Potenz; durch Wiederholung der Multiplikation durch die erste Zahl zur 3ten Potenz u. s. f. So ist z. B.

die 1te Potenz von	$10 = 10^1 = 10$	u. wird gelesen:	10 in der 1ten Potenz, od. 10 auf 1;
„ 2te „ „	$10 = 10^2 = 10.10 = 100$	„ „	10 „ „ 2ten „ , „ 10 auf 2;
„ 3te „ „	$10 = 10^3 = 10.10.10 = 1000$	„ „	10 „ „ 3ten „ , „ 10 auf 3.

Kommen bei einem Decimalbruche keine Zehntel, oder keine Hundertel, oder keine Tausendtel u. s. w. vor, so setzt man an diese Stellen Nullen, gleichwie bei ganzen Zahlen, wenn diese keine Einer, oder keine Zehner 2c. haben. Z. B. a) 0,07 = kein Ganzes, kein Zehntel, sieben Hundertel; gelesen: kein Ganzes, sieben Hundertel. b) 0,00503 = kein Ganzes, 0 Zehntel, 0 Hundertel 5 Tausendtel, 0 Zehntausendtel, 3 Hunderttausendtel; gelesen: Keine Ganze, fünfhundert und drei Hunderttausendtel. c) 65,04009 = 65 Ganze, 0 Zehntel, 4 Hundertel, 0 Tausendtel, 0 Zehntausendtel, 9 Hunderttausendtel; gelesen: 65 Ganze, 4009 Hunderttausendtel.

Das bisher Gesagte möge durch folgende Darstellung, wobei die Ziffer 3 verschiedene Stellen einnimmt, veranschaulicht sein:

Ganze Zahlen.	Siebente Stelle	3000000	= drei	Millionen,
	sechste „	300000	= „	Hunderttausende,
	fünfte „	30000	= „	Zehntausende,
	vierte „	3000	= „	Tausende,
	dritte „	300	= „	Hunderte,
	zweite „	30	= „	Zehner,
	erste „	3	= „	Einer.
Bruchzahlen.	Erste Decimalstelle	0,3	= drei	Zehntel $= {}^{3}/_{10}$,
	zweite „	0,03	= „	Hundertel $= {}^{3}/_{100}$,
	dritte „	0,003	= „	Tausendtel $= {}^{3}/_{1000}$,
	vierte „	0,0003	= „	Zehntausendtel $= {}^{3}/_{10000}$,
	fünfte „	0,00003	= „	Hunderttausendtel $= {}^{3}/_{100000}$,
	sechste „	0,000003	= „	Milliontel $= {}^{3}/_{1000000}$.
		3333333,333333		$= 3333333\,{}^{333333}/_{1000000}$.

Diese Darstellung lehrt nun augenscheinlich, daß eine Zahl (bei den Decimalbrüchen wie bei ganzen Zahlen in demselben Verhältniß), so oft sie um eine Stelle weiter nach rechts rückt, jedes Mal nur noch den zehnten Theil ihres Werthes auf der vorhergehenden Stelle bezeichnet. Zugleich sehen wir auch, daß der Nenner eines Decimalbruches immer eine 1 nebst gerade so viel Nullen hat, als der Zähler Decimalstellen, der Nenner also stets eine Ziffer mehr enthält.

Daraus geht nun zweierlei hervor:

1. Mit jeder Null, welche man dem Zähler eines Decimalbruches voransetzt, werden alle Ziffern desselben in eine niedrigere Stelle gerückt, und darum gilt dann auch jede Ziffer nur noch den zehnten Theil (ein Zehntel) ihres Werthes, den jede auf der zunächst vorhergehenden Stelle gehabt hat; folglich hat auch der ganze Bruch nur mehr ein Zehntel oder den zehnten Theil seines vorigen Werthes, d. h. der Decimalbruch wird gleichsam mit jeder vorgestellten Null durch 10 dividirt.

2. Da der Nenner eines Decimalbruches immer 1 nebst so viel Nullen enthält, als dessen Zähler Decimalziffern hat: so wird der Werth eines solchen Bruches durch Beifügung einer oder mehrer Nullen rechts an die letzte Decimalziffer nicht geändert; es ist dieses eigentlich nur eine Erweiterung des Bruches, indem gleichsam Zähler und Nenner mit derselben Zahl (mit 10 oder 100 2c.) multiplizirt werden,

folglich der Werth des Bruches derselbe bleibt. Folgende Beispiele machen dieses anschauiich:

Zu 1. 3	$= {}^{3}/_{1}$	Zu 2. $0,3$	$= {}^{3}/_{10}$	$= {}^{3}/_{10}$
$0,3$	$= {}^{3}/_{10}$	$0,30$	$= {}^{30}/_{100}$	$= {}^{3}/_{10}$
$0,03$	$= {}^{3}/_{100}$	$0,300$	$= {}^{300}/_{1000}$	$= {}^{3}/_{10}$
$0,003$	$= {}^{3}/_{1000}$	$0,3000$	$= {}^{3000}/_{10000}$	$= {}^{3}/_{10}$
$0,0003$	$= {}^{3}/_{10000}$	$0,30000$	$= {}^{30000}/_{100000}$	$= {}^{3}/_{10}$

Aus diesen beiden Folgerungen ergeben sich wieder zwei weitere, nämlich:

3. Wird in einer Zifferreihe das Decimalkomma von der Rechten zur Linken vorgerückt, so bekommt dadurch die Zahl mit jeder Stelle, in die das Komma vorrückt, einen zehnfach geringern Werth. Es ist dieses gerade so, als würde die Zahl jedes Mal mit 10 dividirt. Es ist dieses **Division** eines Decimalbruches.

4. Wird hingegen das Decimalkomma von der Linken zur Rechten hinabgerückt, so erhält dadurch die Zahl mit jeder Stelle, um die das Komma hinabrückt, einen zehnfach größern Werth. Es ist dieses eben so, als würde die Zahl jedes Mal mit 10 multiplizirt. Es ist dieses **Multiplikation** eines Decimalbruches. Folgende Beispiele mögen das beweisen.

Division

Zu 3. $3333 = {}^{3333}/_{1}$
$333,3 = 333\,{}^{3}/_{10}$ oder ${}^{3333}/_{10}$
$33,33 = 33\,{}^{33}/_{100}$ " ${}^{3333}/_{100}$
$3,333 = 3\,{}^{333}/_{1000}$ " ${}^{3333}/_{1000}$
$0,3333 = {}^{3333}/_{10000}$
$0,03333 = {}^{3333}/_{100000}$
$0,003333 = {}^{3333}/_{1000000}$

Hier wird der Werth jeder folgenden Zahl um das Zehnfache vermindert.

Multiplikation

Zu 4. $0,333 = {}^{3333}/_{10000}$
$3,333 = {}^{3333}/_{10000} \times 10 = 3\,{}^{333}/_{1000}$
$33,33 = 3\,{}^{333}/_{1000} \times 10 = 33\,{}^{33}/_{100}$
$333,3 = 33\,{}^{33}/_{100} \times 10 = 333\,{}^{3}/_{10}$
$3333 = 333\,{}^{3}/_{10} \times 10 = 3333.$

Hier wird der Werth jeder folgenden Zahl um das Zehnfache vermehrt.

Hat der Decimalbruch selbst nur eine Ziffer, so heißt er einstellig, z. B. 0,8; 2,5; 27,3; — hat er zwei Ziffern, so heißt er zweistellig, z. B. 0,75; 319,43; hat er drei — dreistellig u. s. w. z. B. 0,207.

Wie man jede ganze Zahl in Form eines gemeinen Bruches darstellen kann, z. B. $1 = {}^{2}/_{2} = {}^{5}/_{5}$ rc.; $3 = {}^{6}/_{2} = {}^{9}/_{3}$ rc.; so kann auch jede in Form eines Decimalbruches dargestellt werden, was in folgender Weise geschieht, z. B. $1 = 1,0$ $(= {}^{10}/_{10})$; $5 = 5,0$ $(= {}^{50}/_{10})$; $92 = 92,0$ $(= {}^{920}/_{10})$. — Man setzt also zu jeder ganzen Zahl das Decimalkomma und fügt rechts eine Null bei.

Fragen und Aufgaben zur Wiederholung.

1. Was versteht man unter einem Decimalbruch?
2. Wie werden Decimalbrüche angeschrieben?
3. Durch wasfür ein Zeichen lassen sich in einem Decimalbruche die Ganzen und die Bruchtheile erkennen? und wie?
4. Wasfür Bruchtheile bezeichnet eine Ziffer auf der ersten, zweiten, dritten rc. Stelle nach dem Decimalkomma?
5. Wie werden Decimalbruchzahlen — ohne und mit Ganzen — angeschrieben?
6. Schreibe folgende gemeine Brüche in Form der Decimalbrüche an; a) ${}^{7}/_{10}$, b) ${}^{23}/_{100}$, c) ${}^{503}/_{1000}$, d) ${}^{207}/_{1000}$, e) $7\,{}^{3}/_{10}$, f) $29\,{}^{67}/_{100}$.

7. Wie werden die Decimalbrüche gelesen? Wie lies't man folgende Decimalbrüche? a) 0,6; b) 3,9; c) 0,78; d) 17,92; e) 0,207; f) 5,08; g) 0,0035; h) 39,20051; i) 0,003; k) 247,06093; l) 0,1000507; m) 28,0090005?

8. Was wird bewirkt, wenn man dem Zähler eines Decimalbruches eine oder mehre Nullen links voransetzt? was dann, wenn man eine oder mehre Nullen rechts an die letzte Decimalziffer anhängt? Warum? Weise dieses an folgenden Zahlen nach: a) 0,1; b) 0,4; c) 0,7; d) 0,9.

9. Was geschieht, wenn man das Decimalkomma in einer Zahl 1, 2, 3 ꝛc. Stellen nach links vorrückt? und was, wenn man dasselbe nach rechts hinabrückt?

10. Wodurch unterscheiden sich die Zahlen unter a) 35; 3.5; 0,35; 0,035; 0,0035; 0,00035? unter b) 0,57; 0,570; 0,5700; 0,57000? unter c) 7654; 765,4; 76,54; 7,654; 0,7654; 0,07654? unter d) 0,6789; 6,789; 67,89; 678,9; 6789?

11. Behandle 63, 81, 90 wie vorher a und b; dann 2513, 4792 und 5906 wie c und d, und gib an, was geschehen ist, und warum?

12. Was versteht man unter einem ein=, zwei=, dreistelligen ꝛc. Bruch? und wie vielstellig sind die Brüche bei der 7. Aufgabe a—m?

13. Wie werden ganze Zahlen als Decimalbrüche angeschrieben?

3. Anschreiben der Decimalbrüche.

Das Anschreiben der Decimalbrüche in ihrer richtigen Form kann keine besondere Schwierigkeit wieder haben, wenn das bisher Gesagte klar aufgefaßt worden ist, und bei einiger Uebung wird man bald die hinlängliche Fertigkeit hierin erlangen. Besonders merke man sich, daß, wie wir aus dem Vorhergehenden wissen, der Zähler immer eine Ziffer weniger enthält, als der Nenner. Darum braucht man, um Zehntel zu schreiben — eine, Hundertel zu schreiben — zwei, Tausendtel — drei, Zehntausendtel — vier, Hunderttausendtel — fünf, Milliontel zu schreiben — sechs Decimalstellen ꝛc. Enthält der Zähler bloß Ziffern mit absolutem Werthe (1,2,3 ꝛc.), so schreibe man diesen Zähler gerade so an, wie wenn es eine ganze Zahl wäre, setze dann vor die erste Ziffer links das Decimalkomma und vor dieses, auf die Einerstelle, noch eine Null. Z. B. Dreihundert achtundvierzig Tausendtel! — 348 — 0,348. Kommen in den ersten Decimalstellen des Zählers eine oder mehre Nullen vor, d. h. hat der Bruch keine Zehntel, keine Hundertel, so setze man auch hier den Zähler des Bruches als Ganze an, z. B. zweihundert und sechs Milliontel — schreibe 206. Nun erinnere man sich, daß, um Milliontel zu erhalten, im Zähler sechs Stellen nöthig sind. Die drei noch fehlenden Stellen werden nun auf der linken Seite dieser Zahl mit Nullen ausgefüllt, daran links vorn das Decimalkomma und auf die Einerstelle noch eine Null geschrieben, nämlich: 0,000206. Wären mit dem Bruche noch Ganze gegeben, so setzt man an die Einerstelle, statt der Null, diese Ganzen mit dem Decimalkomma. Z. B. 7 Ganze, dreiundfünfzig Milliontel wird geschrieben: 7, 53, dann die Stellen ausgefüllt: 7,000053. —

Anfänglich kann man einen Decimalbruch wol auch zuerst in der Form eines gemeinen Bruches darstellen. Der vorletzte Bruch würde dann heißen $^{206}/_{1000000}$. Nun bedenke man, daß der Zähler eines Decimalbruches eine Ziffer weniger hat, als der Nenner, oder daß der Zähler, um Milliontel zu bezeichnen, 6 Ziffern haben muß; man setzt also links an den Zähler noch drei Nullen. Dieser Decimalbruch — in gewöhnlicher Bruchform dargestellt — heißt dann $^{000206}/_{1000000}$; sonach mit Hinweglassung des Nenners in seiner gehörigen Form: 0,000206. — Nach einiger Uebung wird es dieser Weitläufigkeit nicht mehr bedürfen.

Fragen und Aufgaben zur Wiederholung.

1. Wie verhält sich der Zähler eines Decimalbruches zu dessen Nenner in Hinsicht der Anzahl ihrer Ziffern?

2. Wie viele Ziffern braucht man, um in einem Decimalbruch Zehntel, Hundertel, Tausendtel ꝛc. zu schreiben?

3. Wodurch wird es angedeutet, wenn ein Decimalbruch keine Zehntel, oder keine Hundertel, oder keine Tausendtel enthält?

4. Wie werden folgende Brüche in Form eines Decimalbruches dargestellt? a) $^{9}/_{10}$, b) $^{9}/_{100}$, c) $7^{9}/_{1000}$, d) $^{53}/_{100}$, e) $^{53}/_{1000}$, f) $27^{53}/_{1000}$, g) $^{307}/_{1000}$, h) $^{506}/_{100000}$, i) $7^{504}/_{1000}$; k) $297^{4003}/_{100000}$.

5 Schreibe folgende Decimalbrüche in Ziffern! a) Vier Zehntel; b) sechs Ganze und einundsiebzig Hundertel; c) siebenundvierzig Tausendtel; d) sechzig Ganze und dreiundvierzigHunderrttausendtel; e) acht Zehntausendtel; f) 89 Ganze und 405 Zehntausendtel; g) 493 Ganze und 761 Zehnmilliontel; h) drei Zehntel und 9 Tausendtel; i) siebenmal 1, 5 Hundertel und 7 Hunderttausendtel; k) 793 Hundertel; l) 207 Zehntel; m) 60850093 Milliontel.

4. Erweitern und Gleichnamigmachen der Decimalbrüche.

Aus dem Unterrichte der gemeinen Brüche wissen wir, daß, wenn mehre ungleichnamige Brüche gleichnamig gemacht werden sollen, jeder derselben erweitert werden muß, d. h. der Zähler und Nenner jedes Bruches muß mit einer gewissen Zahl multiplizirt werden. Diese Brüche erscheinen dann zwar unter einer andern Form, aber ihre Werthe bleiben unverändert. (S.32.)

Da der Nenner eines Decimalbruches stets 10, oder ein Produkt aus 10 ist, so kann für solche Brüche die Erweiterungszahl, mit welcher Zähler und Nenner des Decimalbruches zu vervielfachen sind, keine andere sein, als 10, 100, 1000, überhaupt nur ein Produkt aus 10. Das ist auch ganz natürlich; denn Ein Zehntel hat 10 Hundertel, oder 100 Tausendel, oder 1000 Zehntausendel ꝛc.; Ein Hundertel hat 10 Tausendel, 100 Zehntausendtel u. s. w. Demnach ist $\frac{3 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{30 \cdot 10}{100 \cdot 10} = \frac{300 \cdot 10}{1000 \cdot 10} = \frac{3000}{10000}$ ꝛc.; oder $\frac{3 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{30}{100}$; $\frac{3 \cdot 100}{10 \cdot 100} = \frac{300}{1000}$; $\frac{3 \cdot 1000}{10 \cdot 1000} = \frac{3000}{10000}$ ꝛc.

Daraus ersehen wir, daß Zähler und Nenner mit jeder Erweiterung (Multiplikation) rechts gerade so viele Nullen zugesetzt erhalten, als die Erweiterungszahl (der Multiplikator) selbst Nullen hat. Da nun bei Decimalbrüchen — in ihrer richtigen Form — der Nenner nicht angeschrieben wird: so hat man, um einen Decimalbruch zu erweitern, seinem Decimalzähler nur so viele Nullen rechts beizusetzen, als so oft er mit 10 erweitert werden soll, oder so viele Nullen die Erweiterungszahl selbst hat. Obige Brüche $^{3}/_{10} = {}^{30}/_{100} = {}^{300}/_{1000} = {}^{3000}/_{10000}$ heißen also in ihrer eigentlichen Decimalform 0,3 = 0,30 = 0,300 = 0,3000. Daraus ersehen wir zugleich wieder, und was schon Seite 168, Ziffer 2 nachgewiesen wurde, daß ein Decimalbruch durch rechts angesetzte Nullen seinen Werth unverändert beibehält. Um daher mehre gegebene ungleichnamige Decimalbrüche gleichnamig zu machen, verfahre man nach der, aus obiger Entwickelung hervorgehenden

Regel: Denjenigen Brüchen, welche weniger Decimalstellen haben, als der Bruch, welcher derer am meisten hat, hänge man noch so viele Nullen an, bis die Anzahl der Decimalstellen bei allen Brüchen gleich ist. Z B.

0,7 = 0,70000
0,342 = 0,34200
5,06 = 5,06000
9,35704 = 9,35704

Fragen und Aufgaben zur Wiederholung.

1. Wie werden Decimalbrüche erweitert?
2. Wie werden ungleichnamige Decimalbrüche gleichnamig gemacht?
3. Bringe folgende Brüche unter gleiche Benennung: a) 0,3; 0,05; 2,507; 8,35702; 0,02106; b) 5,2796003; 7,62; 27,8; 0,9999; 397,3002; 58,4; 9,7025.

5. Kürzen und Abkürzen der Decimalbrüche.

Aus dem Vorhergehenden haben wir gesehen, daß der Werth eines Decimalbruches nicht verändert wird, wenn man ihm eine oder mehre Nullen auf der rechten Seite hinzufügt; somit wird er auch seinen Werth behalten, wenn man diese Nullen wieder wegwirft. Wie durch jenes der Bruch durch Multiplikation mit 10 oder mit einem Produkte aus 10 erweitert wird, so wird durch dieses derselbe wieder durch Division mit 10 oder dessen Produkt gekürzt, in beiden Fällen ohne Veränderung seines Werthes. Man kann daher jeden Decimalbruch, dessen Endziffern eine oder mehre Nullen sind, dadurch kürzen, daß man die Null oder die Nullen wegwirft, und er behält dennoch seinen ursprünglichen Werth bei. Z. B. a) 0,60 = 0,6; b) 5,300 = 5,3. Hier sind die Brüche nur gekürzt, d. i. auf eine kleinere Benennung zurückgeführt worden.

Anders verhält es sich aber, wenn ein Decimalbruch abgekürzt, d. h. dessen Endziffer, wenn diese eine positive Zahl ist, weggeworfen wird. Hier sind drei Hauptfälle zu beachten, die wir an den Beispielen a) 0,63, b) 0,768 und c) 0,65 erörtern wollen.

a) Nimmt man statt 0,63 nur 0,60 oder 0,6, so hat man offenbar $^3/_{100}$ zu wenig; nimmt man aber 0,70 oder 0,7, so hat man $^7/_{100}$ zu viel genommen. Im letzten Falle wäre also mehr gefehlt, als im ersten.

b) Nimmt man statt 0,768 nur 0,760 oder 0,76, so fehlen $^8/_{1000}$; nimmt man aber 0,770 oder 0,77, so fehlen nur $^2/_{1000}$. Hier ist man also mit der letzten Annahme dem wahren Werthe des Bruches näher.

c) Nimmt man statt 0,65 nur 0,60 oder 0,6, so wäre der Fehler $^5/_{100}$; und nimmt man 0,70 oder 0,7, so ist der Fehler ebenfalls $^5/_{100}$; nach beiden Annahmen fehlt man daher um gleich viel.

Aus Beispiel a) ersehen wir, daß durch das bloße Abwerfen der Endziffer weniger gefehlt wird, als wenn man außer dieser Weglassung die ihr zunächststehende Ziffer um eine Einheit erhöht. Dies ist immer der Fall, wenn die Endziffer kleiner ist als 5.

Beispiel b) zeigt, daß weniger gefehlt wird, wenn die der abgeworfenen nächststehende Ziffer um 1 vermehrt wird, als wenn das Weglassen der Endziffer ohne diese Vermehrung geschähe. Dies ist immer der Fall, wenn die Endziffer größer ist als 5.

Aus Beispiel c) folgt, daß es einerlei ist, ob das Weglassen der Endziffer ohne oder mit jener Vermehrung der nächst vorhergehenden Ziffer um 1 geschieht. Im ersten Falle wird der Werth des Bruches gerade um so viel vermindert, als im zweiten Falle vermehrt. Der Fehler ist in beiden

Fällen gleich groß, nämlich $^{5}/_{100}$ oder ein Halbes einer vorhergehenden Einheit; (den $^{10}/_{100} = ^{1}/_{10}$; $^{5}/_{100}$ also ein halbes Zehntel). — Schließt indeß der Decimalbruch mit dieser 5 nicht, d. i. folgen noch ein oder mehre Ziffern nach 5, will man aber die 5 doch noch weglassen: so muß bei der Abkürzung die der 5 voranstehende Ziffer um 1 vermehrt werden; denn es ist klar, daß dann in diesem Falle weniger gefehlt wird, als wenn man die 5 ohne jene Vermehrung wegwirft. – Folgende Brüche wären also abzukürzen: a) 0,374 – 0,37; b) 3,207 – 3,21; c) 0,855 – 0,85 oder 0,86; d) 9,47451 – 9,475.

In angewandten Beispielen, wo es auf keine besonders große Genauigkeit ankommt, werden die Decimalbrüche gewöhnlich bis auf 1, 2 oder höchstens 3 Decimalstellen abgekürzt. Z. B. 5,482079 abgekürzt: 5,48208 od. 5,4821 od. 5,482 od. 5,48 od. 5,5.

Fragen und Aufgaben zur Wiederholung.

1. Was versteht man unter Kürzen? was unter Abkürzen der Decimalbrüche?
2. Wie werden Decimalbrüche abgekürzt? und warum?
3. Kürze folgende Decimalbrüche! a) 0,70; b) 0,850; c) 5,300; d) 13,1500; e) 0,74000; f) 0,020; g) 46,0500: h) 25,007000.
4. Kürze folgende Decimalbrüche ab, wo es angeht, zuerst auf drei, dann auf zwei und auf eine Decimalstelle! a) 0,72; b) 0,11; c) 0,37; d) 0,529; e) 0,55; f) 1,203; g) 8,709; h) 3,0576; i) 5,8453; k) 13,58953; l) 7,109406; m) 4,99072; n) 0,8970251.

6. Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche.

In der Lehre von den gemeinen Brüchen (S. 12) haben wir gesehen, daß jede ganze Zahl sich in jeder Form eines Bruches ohne Werthsveränderung darstellen läßt, und Seite 33 ist nachgewiesen, daß auch jeder Bruch in jeder andern Bruchform ausgedrückt werden kann, wenn gleich nicht immer in der Form eines einfachen, so doch in der eines Doppelbruches. Demnach muß sich jeder gemeine Bruch in einen Decimalbruch verwandeln, d. h. dessen Werth sich in Zehntel, Hundertel, Tausendtel ꝛc. ausdrücken lassen.

Wenn wir auf die Entstehung der Brüche (S. 5 ff.) Rücksicht nehmen, so kann jeder Bruch in seiner zweifachen Bedeutung aufgefaßt werden, und zwar 1tens entweder in der Bedeutung, daß der Zähler anzeigt, wie viele Theile einer in gleiche Theile getheilten Einheit vorhanden sind, der Nenner aber, in wie viele Theile diese Einheit getheilt ist, also wasfür Theile es sind; oder 2tens in der Bedeutung, daß der Zähler anzeigt, wie viele Ganze zur Theilung kommen, der Nenner aber, der wie vielste Theil von diesen Ganzen zu nehmen sei.

Um nun einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, haben wir somit zwei Wege, nämlich:

1) Man stelle die Einheit (1) in Zehntel, oder Hundertel, oder Tausendtel ꝛc. dar; suche hierauf, wie bei der Erweiterung oder dem Gleichnamigmachen der gemeinen Brüche geschieht, wie viele 10tel, oder 100tel, oder 1000tel ꝛc. es auf einen Theil des gemeinen Bruches trifft, und nehme dann diese Theile so oftmal, als der Zähler dieses Bruches Einheiten hat. Z. B. Verwandle a) $^{1}/_{2}$, b) $^{3}/_{5}$ in Dezimalbrüche!

Ausführung: $1 = {}^{10}/_{10} = {}^{100}/_{100} = {}^{1000}/_{1000}$ ꝛc.

a) $^{1}/_{2}$ ist die Hälfte von 1; es trifft demnach auf $^{1}/_{2}$ die Hälfte von $^{10}/_{10}$, oder von $^{100}/_{100}$ ꝛc. Die Hälfte von $^{10}/_{10}$ ꝛc. findet man, wenn man mit 2, also mit dem Nenner des gemeinen Bruches in die 10 Zehntel, oder

100 Hundertel ꝛc. d. i. in den Zähler des aus 1 dargestellten Decimalbruches dividirt. Also $^{2:10}/_{10} = {}^{5}/_{10}$; $^{2:100}/_{100} = {}^{50}/_{100}$; $^{2:1000}/_{1000} = {}^{500}/_{1000}$. Und da der Zähler des gemeinen Bruches anzeigt, daß nur ein Theil des in zwei gleiche Theile getheilten Ganzen genommen sei, so ist $^{1}/_{2} = 1$mal $^{5}/_{10}$, oder 1mal $^{50}/_{100}$, oder 1mal $^{500}/_{1000}$ ꝛc. Dieses nun in Form eines Decimalbruches ausgedrückt, ist $^{1}/_{2} = 0,5 = 0,50 = 0,500$ ꝛc.

b) $^{3}/_{5}$. Hier haben wir zuerst zu untersuchen, wie viele 10tel, 100tel ꝛc. auf ein Fünftel kommen. Da ein Fünftel der 5te Theil von einem Ganzen ist, so kommt auf ein Fünftel einmal der 5te Theil von 10 Zehntel, oder von 100 Hundertel ꝛc. Also: $^{5:10}/_{10} = {}^{2}/_{10}$; $^{5:100}/_{100} = {}^{20}/_{100}$; $^{5:1000}/_{1000} = {}^{200}/_{1000}$ ꝛc. — Es sind aber 3 Fünftel, daher: 3mal $^{2}/_{10} = {}^{6}/_{10}$; 3mal $^{20}/_{100} = {}^{60}/_{100}$; 3mal $^{200}/_{1000} = {}^{600}/_{1000}$. Es ist demnach $^{3}/_{5} = {}^{6}/_{10} = {}^{60}/_{100} = {}^{600}/_{1000}$, und dieses in Decimalbruchform dargestellt ist $^{3}/_{5} = 0,6 = 0,60 = 0,600$ ꝛc.

Daraus leiten wir die Regel ab: Soll ein gemeiner Bruch in einen Decimalbruch verwandelt werden, so verwandle man die Einheit (1) in 10tel, oder 100tel ꝛc.; dividire sodann mit dem Nenner des gemeinen Bruches in diese 10tel, oder 100tel ꝛc., und multiplizire mit dessen Zähler den erhaltenen Quotienten, den man als Decimalbruch anschreibt.

2) Der zweite Weg, gemeine Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln, ist folgender:

Da der Zähler eines gemeinen Bruches anzeigt, wie viele Ganze vorhanden sind, der Nenner aber, der wie vielste Theil von diesen Ganzen genommen werden soll: so verwandelt man die durch den Zähler angezeigten Ganzen in 10tel, oder 100tel, oder 1000tel u. s. w. und nimmt dann von diesen Theilen den so vielsten Theil, als der Nenner des gemeinen Bruches anzeigt, d. h. man dividirt mit dem Nenner dieses Bruches in die aus den Ganzen erhaltenen 10tel, oder 100tel u. s. w.

Ausführung: a) $^{1}/_{2}$; $1 = {}^{1 \cdot 10}/_{10} = {}^{10}/_{10} = {}^{1 \cdot 100}/_{100} = {}^{100}/_{100} = {}^{1 \cdot 1000}/_{1000} = {}^{1000}/_{1000}$ ꝛc. — $^{2:10}/_{10} = {}^{5}/_{10}$; $^{2:100}/_{100} = {}^{50}/_{100}$; $^{2:1000}/_{1000} = {}^{500}/_{1000}$; daher in Decimalbruchform: $^{1}/_{2} = 0,5 = 0,50 = 0,500$. b) $^{3}/_{5}$; $3 = {}^{3 \cdot 10}/_{10} = {}^{30}/_{10} = {}^{3 \cdot 100}/_{100} = {}^{300}/_{100} = {}^{3 \cdot 1000}/_{1000} = {}^{3000}/_{1000}$ ꝛc. $^{5:30}/_{10} = {}^{6}/_{10}$; $^{5:300}/_{100} = {}^{60}/_{100}$; $^{5:3000}/_{1000} = {}^{600}/_{1000}$; und in Form eines Decimalbruches: $^{3}/_{5} = 0,6 = 0,60 = 0,600$.

Daraus ergibt sich nun die Regel: Um einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, multiplizire man den Zähler des Bruches mit 10, oder 100, oder 1000 ꝛc. und dividire dann dieses Produkt mit dem Nenner des Bruches. Der Quotient drückt den Werth des gemeinen Bruches in Zehntel, wenn der Zähler mit 10, in Hundertel, wenn der Zähler mit 100, in Tausendtel, wenn der Zähler mit 1000 u. s. w. vervielfacht worden ist; oder, was dasselbe ist, der Decimalbruch wird im ersten Falle einstellig, im zweiten Falle zweistellig, im dritten Falle dreistellig u. s. w. Somit können wir auch wieder umgekehrt schließen: soll ein gemeiner Bruch in einen einstelligen, oder in einen zweistelligen, oder in einen dreistelligen ꝛc. Decimalbruch verwandelt werden: so muß man den Zähler des gemeinen

Bruches für den ersten Fall mit 10, für den zweiten mit 100, für den dritten mit 1000 multiplizieren u. s. w.

Da die Multiplikation einer Zahl mit 10, 100, 1000, ꝛc. auf dem kürzesten Wege dadurch ausgeführt werden kann, daß man der zu vervielfachenden ganzen Zahl rechts eine, zwei, drei ꝛc. Nullen beisetzt, und weil ferner bei den Decimalbrüchen die Nenner nicht angeschrieben werden: so kann das zuletzt gezeigte Verfahren, gemeine Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln, noch in kürzerer Weise bewerkstelligt werden. Nämlich, soll ein gemeiner Bruch nur in Zehntel, also in einen einstelligen Decimalbruch verwandelt werden, so setzt man dem Zähler desselben nur eine Null rechts an; soll er in Hundertel, also in einen zweistelligen Decimalbruch verwandelt werden, zwei; in Tausendtel, oder in einen dreistelligen drei Nullen an, u. s. w. Und um anzudeuten, daß der Bruch in einen ein-, oder zwei-, oder dreistelligen Decimalbruch verwandelt werden soll, setzt man zwischen den Zähler und die angehängten Nullen ein Komma. Hierauf dividirt man mit dem Nenner in den dadurch erhaltenen neuen Zähler, setzt aber als die erste Stelle des Quotienten, wenn der Bruch ein ächter ist, eine Null mit dem Dezimalkomma, was anzeigt, daß derselbe keine Ganzen enthält; ist er jedoch ein unächter Bruch, so schreibt man statt der Null vor das Komma die in ihm enthaltenen Ganzen. Der ganze Quotient drückt dann den Werth des gemeinen Bruches in einem Decimalbruche aus. Z. B. Verwandle a) $^2/_5$ in einen einstelligen, b) $^3/_4$ in einen zweistelligen und c) $^{19}/_8$ in einen dreistelligen Decimalbruch!

Ausführung:

a) $^2/_5 = ^{2,0}/_5 = 0{,}4$; b) $^3/_4 = ^{3,00}/_4 = 0{,}75$ c) $^{19}/_8 = ^{19,000}/_8 = 2{,}375$

```
5 : 2,0 = 0,4       4: 3,00 = 0,75      8: 19,000 = 2,375
    0                  28                  16
   ---                 ---                 ---
    20                 -20                 -30
    20                  20                  24
   ---                 ---                 ---
    --                  --                 -60
                                            56
Oder kürzer:                               ---
5: 2,0 = 0,4. —                            -40
   20                                       40
   ---                                     ---
   --                                       --
```

Die Brüche $^2/_5$ und $^3/_4$ enthalten keine Ganzen, daher muß dieses durch eine Null mit dem Decimalkomma angezeigt werden; $^{19}/_8$ enthält aber 2 Ganze, daher sind vor den Decimalbruch selbst diese 2 mit dem Decimalkomma zu setzen.*)

*) Bemerkung. Bei diesem Verfahren kann man sich die Sache auch denken, als würde der Zähler des Bruches $^2/_5$ mit 10, der des Bruches $^3/_4$ mit 100 und der des Bruches $^{19}/_8$ mit 1000 multiplizirt; der Werth des ersten Bruches also um das Zehnfache, der des zweiten um das Hundertfache und der des dritten um das Tausendfache vergrößert. Es wäre demnach $^2/_5 = ^{20}/_5 = 4$; $^3/_4 = ^{300}/_4 = 75$; $^{19}/_8 = ^{19000}/_8 = 2375$. Um nun aber diese Brüche wieder auf ihren wahren Werth zu bringen, muß 4 durch 10, 75 durch 100, und 2375 durch 1000 dividirt werden; also $10 : 4 = ^4/_{10}$ oder 0,4; $100 : 75 = ^{75}/_{100}$ oder 0,75; $1000 : 2375 = 2^{375}/_{1000}$ oder 2,375.

Regel: Soll ein gemeiner Bruch in einen Decimalbruch verwandelt werden, so setze man rechts neben den Zähler des gegebenen Bruches ein Komma, dazu so viele Nullen, als der Decimalbruch Decimalstellen erhalten soll, und dividire dann mit dem Nenner in den dadurch erhaltenen Zähler; dem Quotienten setze man eine Null, oder die im Bruche enthaltenen Ganzen mit dem Decimalkomma voraus.

Dieses letztere Verfahren kann noch in einer andern, etwas veränderten Form ausgeführt werden. Statt dem Zähler des gemeinen Bruches gleich so viele Nullen beizusetzen, als der Decimalbruch Stellen erhalten soll, gibt man demselben nur eine Null bei, d. h. verwandelt die durch den Zähler bezeichneten Ganzen nur in Zehntel, und sucht sodann, wie viele solche Zehntel es auf einen Theil des gemeinen Bruches trifft, wie oben. Bleibt ein Rest, der natürlich Zehntel des Bruches bezeichnet, so verwandelt man diesen durch Anhängung einer Null in Hundertel und dividirt diese wieder mit dem Nenner des gemeinen Bruches; bleibt abermals ein Rest, so verwandelt man diesen auf dieselbe Weise in Tausendtel und dividirt wie vorher. Bei noch ferner bleibenden Resten kann immer in gleicher Weise fortgefahren werden. — Wäre der gegebene Bruch jedoch ein unächter, so setzt man seinem Zähler keine Null bei, sondern dividirt gleich mit dem Nenner in den Zähler, d. h. man zieht zuerst die Ganzen heraus, setzt aber dann dem verbleibenden Reste eine Null bei und fährt hierauf fort, wie oben gesagt. Z. B.

Wasfür Decimalbrüche entstehen a) aus $^{17}/_{20}$? und b) aus $^{23}/_{16}$?

Ausführung:

a) $^{17}/_{20} = {}^{17,0}/_{20} = 0{,}85$; od. $^{17}/_{20} = {}^{1,7}/_{2\not{0}} = 0{,}85$. b) $^{23}/_{16} = 1{,}4375$.

```
20 : 170 = 0,85;    2 : 17 = 0,85    16 : 23 = 1,4375
     160                16                16
     -100               -10               -70
      100                10                64
      ---                --               -60
                                           48
                                           120
                                           112
                                           --80
                                             80
                                             --
```

1. Bemerkung. Statt daß man bei a) dem Zähler eine Null anhängt, kann man im Nenner die Null ausstreichen.

2. Bemerkung. Man hätte auch gleich dem Zähler bei a) zwei, und bei b) vier Nullen beisetzen und wie oben verfahren können.

Regel: Soll ein gemeiner Bruch in einen Decimalbruch verwandelt werden, so setze man dem Zähler des Bruches rechts eine Null bei und dividire mit dem Nenner in diesen erweiterten Zähler; dem etwa verbleibenden Reste hänge man wieder eine Null an und dividire wie vorher. So wird fortgefahren, bis die Division aufgeht, oder bis man im Decimalbruche die verlangten Decimalstellen erhalten hat. Bei ächten Brüchen setzt man dem Quotienten (den Decimalbruchzahlen) eine Null, bei unächten die im Zähler enthaltenen Ganzen mit dem Decimalkomma voran.

Dieses ist das gewöhnliche Verfahren, gemeine Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln, und wird auch bei jeder Division angewendet, welche einen Rest läßt, der nicht in einem gemeinen, sondern in einem Decimalbruch gegeben werden soll, wie nebenstehend an folgendem Beispiele gezeigt ist.

Dividire 6341 durch 236!

```
236 : 6431 = 27,25.
      472
      ----
      1711
      1652
      ----
      --590
        472
        ----
        1180
        1180
        ----
        ----
```

Die Brüche in den bisher gegebenen Beispielen waren stets der Art, daß ihr Werth auch vollständig in einem einfachen Decimalbruche ausgedrückt werden konnte. Sehr oft ist es aber der Fall, daß sich ein gemeiner Bruch nicht vollkommen in einem Decimalbruche dargestellen läßt, sondern nebst dem Decimalbruche noch immer ein Rest bleibt. Wollte man den Bruch in seinem vollen Werthe auch als Decimalbruch darstellen, so könnte dieses nur in Form eines Doppelbruches geschehen, was aber bei Decimalbrüchen nicht üblich ist. Z. B. Verwandle a) $^5/_7$, und b) $^{13}/_{15}$ in dreistellige Decimalbrüche!

Ausführung:

a) $^5/_7 = {}^{5,0}/_7$; $7 : 50 = 0,714..$ b) $^{13}/_{15} = {}^{13,0}/_{13}$; $15 : 130 = 0,866...$

```
a)  7 : 50 = 0,714..          b)  15 : 130 = 0,866...
        49                              120     oder et-
        ---                             ----    was ge-
        -10                             -100    nauer:
          7                               90    0,867.
        ---                             ----
        -30                             -100
         28                               90
        ---                             ----
         -2 Rest.                        -10 Rest.
```

Bei Bruch a — in einen Decimalbruch verwandelt — verbleibt zuletzt $^2/_7$ oder eigentlich $^{2/7}/_{1000} = {}^2/_{7000}$ zum Rest, der nun als sehr unbedeutend ganz weggeworfen wird, und man nimmt 0,714... für $^5/_7$, in welchem Falle nur $^2/_{7000}$ des wahren Werthes fehlen. Würde der Rest schon bei dem zweistelligen Decimalbruche weggeworfen, wo 3, d. i. $^3/_7$ oder vielmehr $^{3/7}/_{100} = {}^3/_{700}$ zum Reste verblieben ist: so wäre der Fehler zwar auch nicht bedeutend gewesen, jedoch größer, als wenn der Bruch in einen dreistelligen Decimalbruch verwandelt wird. Auf je mehre Decimalstellen man also einen Bruch bringt, desto kleiner wird der Fehler durch Wegwerfen des letzten Restes.

Wird der Bruch b) nur in einen zweistelligen Decimalbruch verwandelt und der sich ergebende Rest 10 weggeworfen, also $^{13}/_{15} = 0,86...$ genommen, so begeht man einen Fehler von $^{10/15}/_{100} = {}^{10}/_{1500}$. Es ist aber einleuchtend, daß man dem wahren Werthe des gegebenen Bruches näher kommt, wenn man $^5/_{15}$ d. i. $^{5/15}/_{100} = {}^5/_{1500}$ noch zusetzt, also statt $^{10}/_{15}$ nun $^{15}/_{15} = 1$, d. i. statt $^{10}/_{1500}$ nun $^{15}/_{1500} = {}^1/_{100}$ nimmt, als wenn man den Rest $^{10}/_{15}$ d. i. $^{10}/_{1500}$ ganz wegwirft, und es ist daher $^{13}/_{15} = 0,87$ zu nehmen. — Wieder aber wird man dem Werthe näher kommen, wenn man $^{13}/_{15}$ in einen dreistelligen Decimalbruch verwandelt,

nämlich $^{13}/_{15} = 0,866$... Es bleibt zwar hier ebenfalls 10 zum Reste; aber diese 10 sind $^{10/15}/_{1000} = {}^{10}/_{15000}$, folglich weniger als vorher. Aus gleichen Gründen ist man hier der Wahrheit noch näher, wenn man wieder $^{5}/_{15}$, d. i. $^{5/15}/_{1000} = {}^{5}/_{15000}$ zusetzt und 0,867 statt 0,866... nimmt u. s. f. Ueberhaupt, wenn der letzte Rest weniger, als die Hälfte des Divisors beträgt, so wirft man ihn ganz weg; beträgt er aber über die Hälfte des Divisors, so erhöht man die letzte Ziffer des Decimalbruches um 1. —

Würde man diese Brüche auf noch mehre Decimalstellen bringen, so käme man zwar dem Werthe des gemeinen Bruches immer näher; allein den vollen Werth würde man nie erreichen, weil fortwährend ein Rest bleiben wird, der nun weggeworfen, oder zur letzten Decimalstelle als 1 gezählt werden muß.

Dezimalbrüche, die auf ihren vollen Werth nicht gebracht werden können, erhalten nach der letzten Decimalstelle gewöhnlich einige Punkte, wie obige Brüche zeigen.

In gleicher Weise verfährt man bei der Division ganzer Zahlen, wenn ein Rest bleibt und dieser in einem solchen dargestellt werden soll, derselbe sich aber nicht vollständig in einem Decimalbruche geben läßt. Bei angewandten Aufgaben, wobei es sich nicht um besonders große Genauigkeit handelt, wird in solchen Fällen der Decimalbruch nur auf eine, zwei oder höchstens drei Decimalstellen gebracht.

Z. B. Das bayerische Pfund wiegt 11651 holländische Aß, das englische adv. Pfund 9438 holl. Aß; wie viel englische Pfund gibt ein bayer. Pfund? drücke aber den Bruchrest mit 1 oder 2 oder 3 Dezimalstellen aus.

Beurtheilung: Da 9438 holl. Aß = 1 engl. ℔, so gibt 1 bayer. ℔ = 11651 holl. Aß, so oftmal ein engl. ℔, als 9438 holl. Aß in 11651 holl. Aß enthalten sind; man muß also mit jener Zahl in diese dividiren.

Ausführung:

```
9438 : 11651 = 1,234...
       9438
       -22130
        18876
        -32540
         28314
         -42260
          37752 u. s. w.
```

Wenn es auf keine große Genauigkeit ankommt, so kann man hier sagen:

	1 bayr. ℔	=	1	engl. ℔.
Genauer aber	1 „ „	=	1,2	„ „
noch genauer	1 „ „	=	1,23	„ „
u. noch genauer	1 „ „	=	1,234	„ „

Multiplizirt man die letzten drei Resultate mit 10, 100 und 1000, so erhalten wir: 10 bayr. ℔ = 12 engl. ℔; genauer: 100 bayr. ℔ = 123 engl. ℔; noch genauer 1000 bayr. ℔ = 1234 engl. ℔.

Fragen und Aufgaben zur Wiederholung.

1. Auf wie vielfache Weise können gemeine Brüche in Decimalbrüche verwandelt werden? und wie?

2. Wie erhält man ein-, oder zwei-, oder dreistellige ꝛc. Decimalbrüche?

3. Verwandle in dieser Weise folgende Brüche in Decimalbrüche! a) $^{1}/_{5}$, b) $^{3}/_{4}$, c) $^{4}/_{5}$, d) $^{5}/_{8}$, e) $^{17}/_{25}$, f) $^{13}/_{16}$; und zwar a) und c) in einstellige, b) und e) in zweistellige, d) in einen dreistelligen, und f) in einen vierstelligen Decimalbruch.

4. Wie können gemeine Brüche auf kürzerem Wege in Decimalbrüche verwandelt werden?

5. Welches ist das gewöhnl. Verfahren, gemeine Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln?

6. Was hat man zu beobachten, wenn ächte; was, wenn unächte Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln sind?

7. Verwandle folgende Brüche zuerst nach dem kürzern Verfahren, dann auch auf dem gewöhnlichen Wege in Decimalbrüche! a) $^2/_5$, b) $^{11}/_4$, c) $^7/_8$, d) $^3/_4$, e) $^{17}/_{20}$ f) $^{37}/_{50}$, g) $^{29}/_{32}$, h) $^{23}/_{16}$, i) $^{43}/_2$.

8. Wie hat man bei der Umwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch zu verfahren, wenn bei dieser Operation Reste bleiben?

9. Wie heißen folgende Zahlen in 3, 4, 5 und 6stelligen Decimalzahlen ausgedrückt? a) $^6/_7$, b) $^{11}/_{15}$, c) $^{13}/_{18}$, d) $^{11}/_9$, e) $^{27}/_6$, f) $^{17}/_{30}$, g) $^8/_{13}$, h) $^7/_{11}$, i) $^{19}/_{37}$, k) $^{67}/_{52}$.

10. Was hat man zu thun, wenn bei der Division ganzer, unbenannter oder benannter Zahlen ein Rest bleibt und dieser in einem Decimalbruch dargestellt werden soll?

11. Dividire a) 3337 mit 142; b) 2184 mit 224; c) 1513 mit 85; d) 6314 mit 287; e) 5897 mit 259; f) 1729 mit 41; g) 2013 mit 97, und h) 5107 mit 623, und drücke die Reste in 2, 3, 4 und 5-stelligen Decimalbrüchen aus!

12. Wie viel englische Meilen enthält eine geographische Meile, wenn die englische 4954, die geographische aber 22803 Pariser Fuß hat?

13. Wie viel österreichische Ellen gibt eine bayr. Elle, wenn die österreich. Elle 779, die bayr. aber 833 franz. Millimeter hat?

14. Wie viel bayr. Schfl. gibt ein preußisches Schfl., wenn das bayer. 1081, das preuß. aber 1604 Pariser Cubikzoll hält?

15. Wie viel Frankfurter leichte Pfund gibt ein bayr. Pfund, wenn das bayr. ℔ 11651, das Frankfurter ℔ aber 9735 holländ. Aß wiegt?

(Die Reste sind allenthalben in 3—5 Decimalstellen auszudrücken.)

7. Arten der Decimalbrüche.

Aus dem vorhergehend Abgehandelten, erläutert an Beispielen, ersehen wir, daß es Brüche gibt, deren Werthe sich vollständig in Decimalbrüchen darstellen lassen, und andere, bei denen dieses nicht möglich ist. Zu den erstern gehören alle jene Brüche, deren Nenner in ihrem mit 10 oder mit einem Produkte aus 10 erweiterten (multiplizirten) Zähler ohne Rest enthalten ist, deren Nenner also gleich, oder doch bei fortgesetzter Division in diesem ihrem erweiterten Zähler endlich rein aufgeht. Zu den letztern, deren Werthe sich nur annäherungsweise, also nur unvollständig in Decimalbrüchen geben lassen, gehören jene, deren Nenner in ihrem erweiterten Zähler nie rein enthalten ist, also bei fortgesetzter Division stets einen Rest lassen. Man nennt daher diejenigen Decimalbrüche, die die Werthe der gemeinen Brüche, aus denen sie entwickelt worden sind, vollkommen ausdrücken, **Decimalbrüche mit vollständigem Werthe** oder **endliche Decimalbrüche**. Dagegen jene, welche die wahren Werthe der gemeinen Brüche, aus denen sie enstanden sind, nie vollständig bezeichnen, heißen **Decimalbrüche mit unvollständigem Werthe** oder **unendliche Decimalbrüche**.

In endliche Decimalbrüche können nur jene Brüche verwandelt werden, die 2 oder 5 zum Nenner haben, oder deren Nenner sich rein in die Faktoren 2 und 5 zerlegen lassen; alle übrigen Brüche, die andere Zahlen, oder auch Zahlen, die außer 2 und 5 noch andere Faktoren enthalten, zum Nenner haben, geben stets unendliche Decimalbrüche. Z. B. von den Brüchen, die eine der Zahlen zwischen 1 und 10 zum Nenner haben, geben nur folgende endliche Decimalbrüche:

$^1/_2 = 0{,}5$; — $^1/_4 = 0{,}25$; $^3/_4 = 0{,}75$; —
$^1/_5 = 0{,}2$; $^2/_5 = 0{,}4$; $^3/_5 = 0{,}6$; $^4/_5 = 0{,}8$; —
$^1/_8 = 0{,}125$; $^3/_8 = 0{,}375$; $^5/_8 = 0{,}625$; $^7/_8 = 0{,}875$.

Alle übrigen geben unendliche Decimalbrüche, nämlich:
$^1/_3 = 0,333\ldots$; $^2/_3 = 0,666\ldots$ immer mit Rest
$^1/_6 = 0,166\ldots$; $^5/_6 = 0,833\ldots$ " " "
$^1/_7 = 0,142\ldots$; $^2/_7 = 0,2857\ldots$; $^3/_7 = 0,4285$ rc. immer mit Resten.
$^1/_9 = 0,111\ldots$; $^2/_9 = 0,222\ldots$; $^4/_9 = 0,444\ldots$; $^5/_9 = 0,555\ldots$;
$^7/_9 = 0,777\ldots$; $^8/_9 = 0,888\ldots$, immer mit Resten.

Es ist dieses leicht erklärlich. Denn da die Decimalbrüche nur 10 oder ein Produkt (eine Potenz) aus 10 zum Nenner haben, 10 aber allein nur durch 2 und 5 gemessen, d. i. ohne Rest dividirt werden kann: so können auch nur jene Brüche in endliche Decimalbrüche verwandelt werden, die eben 2, oder 5, oder eine Zahl zum Nenner haben, die sich allein nur in die Faktoren 2 und 5 zerfällen läßt; alle andere Zahlen, nämlich 3, 6, 7, 9 — geben, in 10 dividirt — Reste. Darum müssen auch alle Potenzen dieser Zahlen, so wie alle übrigen Primzahlen, dividirt in die Potenzen der Zahl 10, Reste geben. — Von den Brüchen a) $^{193}/_{250}$, b) $^{286}/_{441}$ und c) $^{347}/_{450}$ läßt sich nur der erste in einen Decimalbruch mit vollständigem Werthe verwandeln, weil sein Nenner 2 und 5 zu Faktoren hat, nämlich 250 = 5.5.5.2; der zweite und dritte Bruch geben Decimalbrüche mit unvollständigem Werthe, weil der Nenner des Bruches b) 3 und 7, und der des c) außer 2 und 5 noch eine andere Zahl zu Faktoren hat, nämlich b) 441 = 3.3.7.7.; c) 450 = 5.5.2.3.3. — Es ist daher $^{193}/_{250} = 0,772$; $^{286}/_{441} = 0,6485\ldots$; $^{347}/_{450} = 0,7711\ldots$

Es ist eine bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit derjenigen Brüche, die sich nicht in Decimalbrüche mit vollständigem Werthe darstellen lassen, daß, wenn sie in Decimalbrüche verwandelt werden, bei fortgesetzter Division, früher oder später regelmäßig dieselbe Zifferfolge im Quotienten, d. i. im Zähler wiederkehrt. Diese Wiederkehr findet immer Statt, sobald der erste Rest dem Zähler des Bruches gleich ist, oder sich wieder ein Rest ergibt, der im Verlaufe der Division schon einmal da war. Z. B. $^1/_3 = 0,333\ldots$; $^7/_9 = 0,777\ldots$; $^1/_{11} = 0,0909\ldots$; $^{17}/_{27} = 0,629629\ldots$ Diese Wiederkehr derselben Ziffer oder derselben Ziffernfolge in dem Zähler eines Decimalbruches nennt man eine **Periode**, und den Bruch einen **periodischen Decimalbruch**. —

Nach der Anzahl der Ziffern, die in einer Periode vorkommen, heißt die Periode ein-, zwei-, drei-, vierzifferig u. s. w. Die Decimalbrüche von $^1/_3 = 0,333\ldots$, und $^7/_9 = 0,777\ldots$ haben Perioden mit 1 Ziffer, die Periode ist einzifferig;
$^1/_{11} = 0,0909\ldots$ hat Perioden mit 2 Ziffern, die Periode ist zweizifferig;
$^{17}/_{27} = 0,629629\ldots$ " " " 3 " " " " dreizifferig.

Daraus sehen wir, daß eine Periode weniger oder mehr Ziffern haben kann; jedoch ist die Anzahl der periodischen Ziffern immer, und im höchsten Falle wenigstens um eine Ziffer kleiner, als der Nenner des gemeinen Bruches Einheiten hat. In dem Bruche $^1/_7$ enthält der Nenner 7 Einheiten; die Periode des Decimalbruches von $^1/_7$ wird daher weniger als 7, und höchstens 6 Ziffern enthalten, weil die Reste bei der Verwandlung von $^1/_7$ in einen Decimalbruch keine anderen sein können, als die Zahlen von 1 bis 6, bei der Wiederkehr desselben Restes aber die Periode auf's neue beginnen muß.

Der Decimalbruch von $\frac{1}{7}$ hat auch wirklich eine sechsziffrige Periode, nämlich $\frac{1}{7} = 0,142857142857...$

In den vorgehenden Decimalbrüchen fängt die Periode immer gleich mit der ersten Ziffer des Decimalzählers an, und diese heißen darum **rein periodische Decimalbrüche.** Jeder gemeine Bruch, dessen Nenner die Faktoren 2 oder 5 nicht enthält, gibt einen rein periodischen Decimalbruch, wie die obigen, weil ihre Nenner (3,11,27,7) weder 2 noch 5 zu Faktoren haben.

Gehen der Periode eine oder mehre Ziffern voraus, fängt die Periode also erst mit der zweiten, oder mit einer der folgenden Decimalstellen an: so nennt man einen solchen Decimalbruch **unrein periodisch.**

Jeder gemeine Bruch, dessen Nenner die Faktoren 2 und 5 und noch eine andere Zahl enthält, gibt einen unreinen periodischen Decimalbruch. Z. B. a) $\frac{5}{6}$. Der Nenner dieses Bruches, nämlich 6 (= 2.3) enthält außer 2 noch den Faktor 3. $\frac{5}{6} = 0,833...$ Hier ist 3 die Periode und eine Ziffer (8) geht voraus; 0,833... ist also ein unreiner periodischer Decimalbruch.

b) $\frac{19}{30}$. Der Nenner 30 (= 2.5.3) hat 2, 5 und 3 zu Faktoren. Dieser Bruch wird also ebenfalls einen unreinen periodischen Decimalbruch geben. $\frac{19}{30} = 0,633...$; 3 ist die Periode und eine Ziffer (6) geht voraus.

c) $\frac{79}{175}$. Der Nenner 175(=5.5.7) hat zweimal 5 und 7 zu Faktoren. $\frac{79}{175} = 0,55428571428...$ Hier ist 428571 die Periode und zwei Ziffern (55) gehen voraus.

d) $\frac{71}{88}$. Der Nenner 88(=2.2.2.11) hat dreimal 2 und 11 zu Faktoren. $\frac{71}{88} = 0,8068181...$ 81 ist die Periode und drei Ziffern gehen voraus.

Bei genauerer Vergleichung dieser Decimalbrüche mit den Faktoren der gemeinen Brüche muß uns das merkwürdige Verhältniß auffallen, daß die Anzahl der der Periode vorausgehenden Ziffern stets der Anzahl der Faktoren 2 und 5, welche der Nenner des gemeinen Bruches enthält, gleichkommt. So oft also die Faktoren 2 oder 5, oder so oft 2 und 5 in dem Nenner des gemeinen Bruches enthalten sind, eben so viele nichtperiodische Ziffern gehen der Periode voraus. — Dieses Verhältniß tritt jedoch nur dann ein, wenn der gemeine Bruch auf seine kleinste Benennung gebracht worden ist, dessen Zähler und Nenner also Primzahlen unter sich sind. Z. B. a) $\frac{9}{12}$. Der Nenner 12 (= 2. 2. 3) hat zweimal 2 und 3 zu Faktoren. Der Periode des Decimalbruches müßten nun, der Regel gemäß, zwei nichtperiodische Ziffern vorausgehen; allein $\frac{9}{12} = 0,75$, ist somit gar kein periodischer Decimalbruch. — So auch b) $\frac{25}{75}$. Der Nenner 75 (= 5.5.3) hat zweimal 5 und 3 zu Faktoren; der Decimalbruch sollte nun 2 nichtperiodische Ziffern enthalten. Aber $\frac{25}{75} = 0,333...$, gibt somit einen rein periodischen Decimalbruch. Ferner c) $\frac{120}{176}$. Der Nenner 176 (= 2.2.2.2.11) hat viermal 2 und 11 zu Faktoren; demnach müßte der Decimalbruch 4 unperiodische Ziffern haben. Jedoch $\frac{120}{176} = 0,68181...$; der Decimalbruch fängt die Periode mit 81 an, und es geht ihr nur eine Ziffer (6) voraus. Bringt man diese Brüche auf ihre kleinste Benennung, nämlich a) $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, b) $\frac{25}{75} = \frac{1}{3}$, c) $\frac{120}{176} = \frac{15}{22}$: so folgen sie bei ihrer Verwandlung in Decimalbrüche den bekannten Gesetzen. —

Enthält ein Decimalbruch keine Ganzen, sondern nur Decimalbruchtheile, so heißt er ein **reiner Decimalbruch,** z. B. 0,75; enthält er aber nebst den Bruchtheilen auch noch Ganze, so heißt er ein **gemischter Decimalbruch,** z. B. 7,125.

Fragen und Aufgaben zur Wiederholung.

1. Welche Brüche nennt man Decimalbrüche mit vollständigem, welche mit un-

vollständigem Werthe? Warum heißen jene auch endliche, und diese unendliche Decimalbrüche?

2. Welche gemeine Brüche ergeben endliche, welche unendliche Decimalbrüche? und warum?

3. Gib 5 gemeine Brüche an, die sich in endliche, und 5, die sich in unendliche Decimalbrüche verwandeln lassen? Wie heißen diese dann in Decimalbrüchen dargestellt?

4. Was versteht man bei Decimalbrüchen unter Periode? Was ist eine ein=, zwei=, dreizifferige ꝛc. Periode?

5. Wie vielzifferig kann eine Periode sein? und warum?

6. Eine wie vielzifferige Periode gibt jeder der folgenden Brüche: $^2/_3$, $^5/_{11}$, $^{13}/_{27}$, $^{23}/_{37}$?

7. Was ist ein periodischer Decimalbruch? wann nennt man einen solchen rein periodisch, wann unrein periodisch?

8. Welche gemeine Brüche ergeben rein periodische, welche unrein periodische Decimalbrüche?

9. Wann entstehen aus gemeinen Brüchen periodische Decimalbrüche mit 1, 2, 3 4 ꝛc. der Periode vorangehenden unreinen periodischen Ziffern?

10. Welche Brüche nennt man reine, welche gemischte Decimalbrüche?

11. Wasfür Arten von Decimalbrüchen gibt es? Gib von jeder Art drei an!

12. Verwandle folgende Brüche in Decimalbrüche, und gib an, zu welcher Art jeder gehört und warum! a) $^{13}/_{40}$, b) $^7/_{16}$, c) $^9/_{25}$, d) $^{43}/_{32}$, e) $^{15}/_{37}$, f) $^{31}/_{41}$, g) $^{29}/_{13}$, h) $^5/_6$, i) $^{11}/_{15}$, k) $^{29}/_{56}$, l) $^{113}/_{176}$, m) $^{16}/_{24}$, n) $^{65}/_{125}$, o) $^{150}/_{225}$.

8. Zurückführen der Decimalbrüche in gemeine Brüche.

Hierbei ist vor Allem zu berücksichtigen, ob der Decimalbruch, der in einen gemeinen Bruch zurückgeführt werden soll, ein Decimalbruch mit vollständigem oder mit unvollständigem Werthe ist. In letzterem Falle ist dann noch weiter zu beachten, ob derselbe ein rein periodischer, oder ein unreinperiodischer ist, in sofern die Periode erkannt werden kann.

1. Decimalbrüche mit vollständigem Werthe.

Da ein solcher den vollständigen Werth ausdrückt, so ist klar, daß man den Decimalbruch nur als gemeinen Bruch anzusetzen braucht, d. h. man schreibt nebst dem Zähler auch den Nenner an und bringt diesen Bruch durch Kürzen, wenn solches angeht, auf seine kleinste Benennung. Z. B. a) $0{,}8 = {^8/_{10}} = {^4/_5}$; b) $0{,}75 = {^{75}/_{100}} = {^3/_4}$; c) $0{,}92 = {^{92}/_{100}} = {^{23}/_{25}}$; d) $0{,}625 = {^{625}/_{1000}} = {^5/_8}$.

2. Decimalbrüche mit unvollständigem Werthe, und zwar

a) rein periodische Decimalbrüche.

Um den Grund des Verfahrens einzusehen, müssen wir die eigentliche Entstehung eines periodischen Decimalbruches zu erklären suchen. Behufs dieses wollen wir untersuchen, aus welchen gemeinen Brüchen die Decimalbrüche a) $0{,}1 = 0{,}100$ und b) $0{,}1\ldots = 0{,}111\ldots$ [dreistellig] entstanden sind. Der erste (0,1) ist nämlich ein Decimalbruch mit vollständigem Werthe, er hat also — auch in einen gemeinen Bruch zurückgeführt, wie als Decimalbruch — 10 zum Nenner, und ist demnach aus dem gemeinen Bruche $^1/_{10}$ entstanden. — Der zweite Decimalbruch (0,1...) hat zwar als Decimalbruch gleichfalls 10 zum Nenner; allein weil er unter diesem Nenner nicht den vollständigen Werth des gemeinen Bruches, aus dem er entstanden ist, ausdrückt: so kann der Nenner desselben nicht 10, sondern es muß eine kleinere Zahl sein. Diese Zahl kann aber keine kleinere sein, als die des um 1 verminderten Decimal=Nenners, nämlich 9; denn nur der gemeine Bruch $^1/_9$ gibt den unendlichen Decimal=

bruch 0,1...=0,111.. mit der einzifferigen Periode 1. Mit den periodischen Decimalbrüchen 0,2..., 0,3..., 0,4... 2c. muß es sich eben so verhalten, denn sie sind nur Zusammensetzungen oder Vielfache von 0,1...; nämlich 0,2... ist 0,1...+0,1... oder 2mal 0,1...; 0,3...=0,1...+0,1...+0,1... oder 3mal 0,1... u. s. w. Diese Brüche geben daher die gemeinen Brüche $^2/_9$, $^3/_9$, $^4/_9$ 2c. aus denen sich wieder jene Decimalbrüche entwickeln lassen. $^3/_9=^1/_3$; daher ist $^1/_3$ eigentlich nur der gekürzte Bruch $^3/_9$; $^1/_3$ gibt auch wirklich denselben Decimalbruch, wie $^3/_9$, nämlich $^1/_3$=0,3...

Dasselbe Verhältniß, wie bei den einstelligen periodischen Decimalbrüchen, findet auch Statt bei allen zwei- und mehrstelligen Decimalbrüchen, mit zwei- und mehrzifferigen Perioden. Wir wollen dieses nur noch an einem einzigen Beispiele nachweisen. Der zweistellige periodische Decimalbruch 0,01... (= 0,0101...) mit der zweizifferigen Periode 01 kann nicht aus dem gemeinen Bruche $^1/_{100}$ entstanden sein; denn in diesem Falle wäre derselbe ein Decimalbruch mit vollständigem Werthe und könnte keine Periode haben. Der Nenner des ihm angehörenden gemeinen Bruches muß also wieder kleiner sein als 100; derselbe kann indeß doch in keinem Falle kleiner sein, als der um 1 verminderte Nenner des Decimalbruches, nämlich 99, weil sich nur aus dem Bruche $^1/_{99}$ der periodische Decimalbruch 0,01... = 0,0101... entwickeln läßt. — Wenn nun der periodische Decimalbruch 0,01... aus dem Bruche $^1/_{99}$ entstanden ist: so müssen 0,05...; 0,11...; 0,45...; 0,66... 2c. aus $^5/_{99}$, $^{11}/_{99}$ = $^1/_9$; $^{45}/_{99}$ = $^5/_{11}$; $^{66}/_{99}$ = $^2/_3$ 2c. entstanden sein; denn 0,05...=5.0,01...; 0,11...=11.0,01...; 0,45...=45.0,01...; 0,66... = 66.0,01... 2c. $^1/_9$, $^5/_{11}$ und $^2/_3$ sind nur die auf ihre kleinste Benennung gebrachten Brüche von $^{11}/_{99}$, $^{45}/_{99}$ und $^{66}/_{99}$, und geben dieselben periodischen Decimalbrüche. — Ganz so, wie gesagt, verhält es sich auch mit mehrstelligen periodischen Decimalbrüchen. Z. B. 0,405... = 405.0,001...; daher 0,405... = $^{405}/_{999}$ = $^{15}/_{37}$; 0,63414... =63414.0,00001..., daher 0,63414...=$^{63414}/_{99999}$=$^{26}/_{41}$; 0,6363...=6363.0,0001..., daher 0,6363... = $^{6363}/_{9999}$=$^7/_{11}$. —.Da der letzte Decimalbruch zweizifferige Perioden hat, so ist es nicht nöthig, den ganzen Zähler zu nehmen; es ist hinreichend, wenn eine Periode gesetzt wird, man gelangt zu demselben Resultate, nämlich 0,63... = 63.0,01..., daher 0,63... = $^{63}/_{99}$ = $^7/_{11}$. So in allen ähnlichen Fällen.

Aus diesen Beispielen ergibt sich nun die einfache Regel: Um einen rein periodischen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zurückzuführen, nehme man die Ziffern einer Periode zum Zähler und den um 1 verminderten Nenner des Decimalbruches zum Nenner; oder man setze die Ziffern einer Periode zum Zähler und darunter als Nenner so viele 9, als die Periode Ziffern hat.

b) Unrein periodische Decimalbrüche.

Da bei den unrein periodischen Decimalbrüchen die Periode selbst sich auf dasselbe Gesetz gründet, auf das sich die Perioden der rein periodischen Decimalbrüche gründen, die der Periode vorangehenden unperiodischen Ziffern aber mit einem Decimalbruche mit vollständigem Werthe zu vergleichen sind: so verwandle man einen unrein periodischen Decimalbruch, um ihn in einen gemeinen Bruch zurückzuführen, zuerst in einen gemischten Decimalbruch dadurch, daß man das Decimalkomma hinter die unperiodi-

schen Ziffern setzt, d. h. der Decimalbruch wird mit 1 und so vielen Nullen, als unperiodische Ziffern vorhanden sind, vervielfacht. Dadurch erhält man einen rein periodischen Decimalbruch, der sodann auf oben gezeigte Weise in einen gemeinen Bruch verwandelt wird. Z. B. Führe 0,43918918... in einen gemeinen Bruch zurück! Die Periode des Bruches ist 918, der die zwei nicht periodischen Ziffern 3 und 4 vorausgehen. Man setze nun das Decimalkomma um diese zwei Ziffern zurück, was so viel ist, als wenn der Bruch mit 100 multiplizirt worden wäre, wodurch man nun den gemischten Decimalbruch 43,918... erhält. Da der Bruch allein ein dreizifferiger rein periodischer Decimalbruch ist, so denken wir, er sei entstanden aus 918mal 0,001..., d. i. 918mal $^1/_{999} = {}^{918}/_{999}$. Setzt man zu diesem Bruche noch die durch Multiplikation mit 100 erhaltenen 43 Ganzen, so haben wir die gemischte Zahl $43^{918}/_{999}$, was aber das Hundertfache des wahren Werthes ist. Um nun den wahren Werth des Bruches zu erhalten, müssen wir die gemischte Zahl wieder mit 100 dividiren. $100 : 43^{918}/_{999} = {}^{43875}/_{99900}$. Wird dieser Bruch mit 675 gekürzt, so erhält man $^{65}/_{148}$, aus welchem sich wieder der obige Decimalbruch herstellen läßt.

Oder: Da die unrein periodischen Ziffern eines Decimalbruches ein Theil desselben mit vollständigem Werthe sind: so zerfälle man den unrein-periodischen Decimalbruch in zwei Theile, und zwar so, daß der erste Theil die unrein periodischen, der zweite die periodischen Ziffern einer Periode enthält. Der erste Theil ist sodann zu behandeln wie ein Decimalbruch mit vollständigem Werthe; der zweite wie ein rein periodischer, dessen Nenner aber rechts so viele Nullen beizusetzen sind, als unperiodische Ziffern vorhanden sind. Nun werden beide Theile gleichnamig gemacht, addirt und, wenn es angeht, gekürzt. Z. B.
$0,833... = 0,8 + 0,033... = {}^8/_{10} + {}^3/_{90} = {}^{72}/_{90} + {}^3/_{90} = {}^{75}/_{90} = {}^5/_6$.
Ferner der obige Bruch: $0,43918918... = 0,43 + 0,009189... = {}^{43}/_{100} + {}^{918}/_{99900} = {}^{42957}/_{99900} + {}^{918}/_{99900} = {}^{43875}/_{99900}$ (mit 675 gekürzt) $= {}^{65}/_{148}$

Der Grund, warum man dem Nenner des zweiten Theiles eine, oder mehre Nullen rechts beizusetzen hat, ist leicht einzusehen. Würde bei dem ersten Bruche die Periode gleich in der ersten Stelle mit 3 beginnen, so würde diese 3 — in einen gemeinen Bruch verwandelt — $^3/_9$ sein. Die Periode 3 beginnt aber erst mit der zweiten Stelle, hat also einen 10mal so geringen Werth, als sie auf der ersten Decimalstelle hätte, und darum ist ihr Werth nur $^3/_{90}$. Aus gleichem Grunde hat man bei dem zweiten Bruche dem Nenner zwei Nullen beizusetzen, und so in allen ähnlichen Fällen.

Das gewöhnliche Verfahren, periodische Decimalbrüche in gemeine Brüche zurückzuführen, ist folgendes, und zwar

a) bei rein periodischen Decimalbrüchen setzt man den Decimalbruch = x (a); darauf multiplizirt man diesen Bruch mit 1 nebst so vielen Nullen, als die Periode Ziffern hat, d. i. man stellt das Decimalkomma eine ganze Periode nach rechts zurück (b); nun zieht man hievon x (a von b) ab und bestimmt aus den Resten den gemeinen Bruch, indem man mit dem Faktor Rest in den Rest des Decimalbruches dividirt. Z. B.

	I.		II.
a)	$x = 0,666...$	a)	$x = 0,629629...$
b)	$10\,x = 6,666...$	b)	$1000\,x = 629,629629...$
a) von b) subtr.	$x = 0,666...$	a) von b) subtr.	$x = 0,629629...$
	$9\,x = 6$		$999\,x = 629$
	$x = 9 : 6 = {}^6/_9 = {}^2/_3$.		$x = 999 : 629 = {}^{629}/_{999} = {}^{17}/_{27}$

Diese Operation führt uns ebenfalls auf die schon oben gegebene einfache Regel: Setze die Ziffern einer Periode des rein periodischen Bruches zum Zähler und darunter als Nenner so viele 9, als die Periode Ziffern hat.

b) **Bei unrein periodischen Decimalbrüchen** setze man ebenfalls den Decimalbruch = x (a); diesen Decimalbruch multiplizire man mit 1 und so vielen Nullen, als derselbe bis zur zweiten Periode Ziffern hat (b). Ferner multiplizire man den Decimalbruch auch noch mit 1 und so vielen Nullen, als unperiodische Ziffern vorhanden sind (c). Nun subtrahire den Faktor c) von dem Faktor b) und auch das Produkt c) von dem Produkte b) und dividire mit dem Reste der Faktoren in den Rest der Produkte; der sich ergebende Quotient drückt dann den Werth des Decimalbruchs in einem gemeinen Bruche aus. Z. B. I. 0,7222... mit der einzifferigen dreifachen Periode; II. 0,43918918... mit der dreizifferigen zweifachen Periode.

	I.		II.
a)	$x = 0{,}7222...$	a)	$x = 0{,}43918918...$
b)	$100\,x = 72{,}222...$	b)	$100000\,x = 43918{,}918...$
c)	$10\,x = 7{,}222...$	c)	$100\,x = 43{,}918...$
c) von b) subtr.	$90\,x = 65$	c) von b) subtr.	$99900\,x = 43875$
	$x = 90:65 = {}^{65}/_{90} = {}^{13}/_{18}.$		$x = 99900:43875 = {}^{43875}/_{99900} = {}^{65}/_{148}$

Gehen einer Periode eine oder mehre Nullen voraus, so ist ein solcher Bruch natürlich als ein unrein periodischer zu betrachten und in derselben Weise zu behandeln. Z. B. I. 0,0333..., II. 0,006363...

	I.		II.
a)	$x = 0{,}033...$	a)	$x = 0{,}006363...$
b)	$100\,x = 3{,}33$	b)	$10000\,x = 63{,}6363...$
c)	$10\,x = 0{,}33$	c)	$100\,x = 0{,}6363...$
	$90\,x = 3$		$9900\,x = 63$
	$x = 90:3 = {}^{3}/_{90} = {}^{1}/_{30}.$		$x = 9900:63 = {}^{63}/_{9900} = {}^{7}/_{1100}.$

Bei aufmerksamer Beachtung dieses Verfahrens finden wir leicht das eigenthümliche Verhältniß, daß die Periode von der Periode zu subtrahiren ist und darum hier kein Rest bleibt, und daß dann die nicht periodischen Zahlen des Decimalbruches von den Ziffern der Periode abzuziehen kommen. Dieses Verhältniß führt uns daher auf ein ganz einfaches und leichtes Verfahren, unrein periodische Decimalbrüche in gemeine Brüche zurück zu führen nach folgender Regel:

Schreibe den Zähler des unrein periodischen Decimalbruches bis zur zweiten Periode an; unter die niedrigsten Stellen dieser Periode setze dann die nicht periodischen Ziffern und subtrahire diese von jenen. Der Rest ist der Zähler für den gemeinen Bruch, dessen Nenner aber so viele Neuner (9), als die Periode Ziffern hat nebst so vielen rechts anzufügenden Nullen, als unperiodische Ziffern im Zähler enthalten sind. Z. B. der Bruch 0,7222... hat *eine* unperiodische Ziffer (7) und *einzifferige* Perioden (2). Der Bruch 0,43918918... enthält *zwei* unperiodische Ziffern (43) und Perioden mit *drei* Ziffern (918). Daher:

I.		II.	
schreibe:	72		43918
ziehe ab:	7	(subtrh.)	43
Rest:	$\frac{65}{90} = {}^{13}/_{18}.$	Rest.	$\frac{43875}{99900} = {}^{65}/_{148}.$

Bei dem ersten Beispiele schreibt man als Nenner 1 Neuner, gemäß der Zifferanzahl der Periode, und eine Null, gemäß der unperiodischen Ziffern; im zweiten Beispiele 3 Neuner und zwei Nullen — aus gleichen Gründen.

Bei Decimalbrüchen, die nur Nullen als unperiodische Ziffern der Periode voraushaben, gibt man der Periode so viele 9, als sie Ziffern hat, nebst so vielen Nullen rechts, als ihr Nullen vorausgehen, zum Nenner. Z. B. a) 0,0333... $= {}^{3}/_{90} = {}^{1}/_{30}$; b) 0,006363... $= {}^{63}/_{9900} = {}^{7}/_{1100}$.
Der Grund ist derselbe, wie schon oben, Seite 184 dargethan worden.

3. Decimalbrüche mit unvollständigem Werthe, bei welchen aber die Periode nicht bekannt ist, können bloß annäherungsweise in gemeinen Brüchen ausgedrückt werden. In diesem Falle gibt man dem Zähler des Decimalbruches 1 nebst so vielen Nullen zum Nenner, als derselbe Ziffern hat; oder man kürzt den Decimalbruch wol auch zuerst ab und bringt ihn dann als gemeinen Bruch auf seine kleinste Benennung, wenn solches angeht. Z. B. a) 0,672... wenig über ${}^{672}/_{1000} = {}^{84}/_{125}$; b) 0,251... wenig über ${}^{25}/_{100} = {}^{1}/_{4}$; c) 0,648... beinahe $= 0,65 = {}^{65}/_{100} = {}^{13}/_{20}$; d) 0,37502... wenig über $0,375 = {}^{375}/_{1000} = {}^{15}/_{40}$; e) 0,996201... beinahe 1 Ganzes. —

Fragen und Aufgaben zur Wiederholung.

1. Wie werden Decimalbrüche mit vollständigem Werthe in gemeine Brüche zurückgeführt? und warum?

2. Verwandle folgende Decimalbrüche in gemeine! a) 0,375; b) 0,55; c) 0,96; d) 0,35; e) 0,84; f) 0,625; g) 0,075; h) 0,0875; i) 0,0048; k) 0,84375; l) 0,000125; m) 0,07190625.

3. Wie werden rein periodische Decimalbrüche in gemeine Brüche zurückgeführt? und warum?

4. Führe folgende rein periodische Decimalbrüche in gemeine Brüche zurück! a) 0,666...; b) 0,4545...; c) 0,7272...; d) 0,703703...; e) 0,432432...; f) 0,63414634...; g) 0,35135...; h) 0,857142857...; i) 0,85365853...; k) 0,53846153...; l) 0,57142857...; m) 0,7741935483870967774...

5. Auf welche Weise verwandelt man unrein periodische Decimalbrüche in gemeine Brüche? Wie ist das zu erklären? Und wie können solche Brüche auf dem kürzesten Wege in gemeine Brüche verwandelt werden?

6. Wie heißen folgende Decimalbrüche in Form gemeiner Brüche? a) 0,8333...; b) 0,6111...; c) 0,8666...; d) 0,3111...; e) 0,7592592...; f) 0,6428571428...; g) 0,5833...; h) 0,7166...; i) 0,568181...; k) 0,53378378...; l) 0,678571428571...; m) 0,4886363...; n) 0,456081081...; o) 0,422297297...; p) 0,077...; q) 0,0066...; r) 0,04545...; s) 0,0048148...

7. Wie werden Decimalbrüche, bei denen die Periode nicht erkannt werden kann, in gemeinen Brüchen dargestellt?

8. Verwandle folgende Decimalbrüche in gemeine Brüche! a) 0,596...; b) 0,325...; c) 0,751...; d) 0,473...; e) 0,348...; f) 0,62503...; g) 0,04913...; h) 0,49914....; i) 0,99507...

Die vier Grundrechnungsarten in Decimalbrüchen.

Seite 166 ff., Ziffer 2 ist gezeigt worden, daß die Decimalbruchzahlen ganz denselben Gesetzen unsers dekadischen Zahlen-Systems unterworfen sind, wie die ganzen Zahlen. Darum ist die Behandlung der Decimalbrüche in den vier Grundrechnungsarten, so wie beim Rechnen überhaupt, im Wesentlichen eben dieselbe, wie die ganzer Zahlen. Das Folgende wird dieses darthun.

I. Addition der Decimalbrüche.

Da nur Gleichnamiges zu Gleichnamigem addirt werden kann, so hat man hier besonders darauf zu sehen, daß die Zahlen gleicher Ordnung oder die gleichstelligen Zahlen, wie bei ganzen Zahlen, genau unter einander gesetzt werden, also Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. w., und addirt dann, bei der niedrigsten Stelle angefangen, die gegebenen Summanden ebenso, wie ganze Zahlen. Bei der Summe werden durch das Decimalkomma dann eben so viele Ziffern abgetrennt, als der größte Decimalbruch der Summanden Decimalstellen hat. Um die Stellen richtig unter einander zu bringen, beobachte man, daß die Decimalkomma alle senkrecht unter einander zu stehen kommen. Beispiele. Addire!

Ausführung:

a)	b)	c)	d)
0,735	57	9,725	0,0087
0,272	5,65	0,67	9,25
0,056	0,72	18,048	687,08029
0,804	74,8	6,3	30,7
1,867	138,17	34,743	727,03899

Ungeübtere Rechner können sich anfänglich das richtige Untereinandersetzen der Stellen dadurch erleichtern, wenn sie nach Ziffer 4, S. 171 die gegebenen Decimalzahlen erweitern, d. i. gleichnamig machen. Z. B.

Ausführung:

6,8		6,80000
37,0057		37,00570
264,97	=	264,97000
0,201		0,20100
5,02081		5,02081
313,99751		313,99751

Sind die Summanden periodische Brüche, oder kommen periodische und nichtperiodische Brüche zu addiren, und will man in dem Ergebniß eine größere Genauigkeit erzielen: so wird bei den periodischen Decimalbrüchen die Erweiterung oder das Gleichnamigmachen nicht durch Nullen, wie oben, sondern durch Ansetzen der periodischen Ziffern bewerkstelligt. Z. B. Addire a) 4,33... + 9,55... + 0,66... + 7,03125 + 5,6818... b) 8,6363... + 5,722... + 9,4324... + 6,75 + 3,024390...

Ausführung:

	a)	genauer:	b)	genauer:
	4,33...	4,33333...	8,636...	8,636363...
	9,55...	9,55555...	5,722...	5,722222...
	0,66...	0,66666...	9,4324...	9,432432...
	7,03125	7,03125	6,75	6,750000
	5,6818...	5,68181...	3,024390...	3,024390...
	27,25305	27,26860	33,564790	33,565407

Diese Erweiterung (Gleichnamigmachung) der Decimalbrüche kann freilich nur dann ausgeführt werden, wenn die Perioden zu erkennen sind.

Sollen gemeine Brüche zusammengezählt, deren Summe aber in einem Decimalbruche ausgedrückt, oder ihre Summe zu einem Decimalbruch addirt werden muß: so kann man sie entweder als gemeine Brüche addiren und ihre Summe sodann nach Ziff. 6 S. 173 ff. in einen Decimalbruch verwandeln, oder man verwandelt gleich jeden Summanden in einen Decimalbruch und summirt sie dann als solche. Z. B.

Ein Bauer hat ein Oekonomiegut mit 37,65 Tagwerk Grundstücken. Dazu kauft er sich noch $2^3/_4$ Tgw. Ackerfeld, $5^2/_3$ Tgw. Wiesengrund, $^4/_5$ Tgw. Weide und $^6/_7$ Tgw. Waldung; a) wie viel Tgw. kaufte er sich noch zu seinem Gute? b) wie groß ist nun sein Besitzthum?

ad a) Ausführung:

1. in gemeinen Brüchen:

Tagw.	420
$2^3/_4$	105 × 3 = 315
$5^2/_3$	140 × 2 = 280
$^4/_5$	84 × 4 = 336
$^6/_7$	60 × 6 = 360
10,0738...	420 : 1291 = 3,0738...

```
(420:)   1260
         ——3100
          294
         —160
          126
         —340
          336   u. s. w.
```

Verwandeln der gemeinen Brüche in Decimalbrüche.

$2^3/_4 = 2^{3,0}/_4 = 2,75$; $^3/_4 = 4:3,0 = 0,75$

```
 28
—20
 20
 ——
```

$^4/_5 = ^{4,0}/_5 = 0,8$; $^4/_5 = 5:4,0 = 8$

```
40
——
```

$5^2/_3 = 5^{2,0}/_3 = 5,66...$; $^2/_3 = 3:2,0 = 0,66...$

```
 18
—20
 18
 20 u. s. w.
```

$^6/_7 = ^{6,0}/_7 = 0,857...$; $^6/_7 = 7:6,0 = 0,857...$

```
 56
—40
 35
—50
 49
—10 u. s. w.
```

2. in Decimalbrüchen:

		oder genauer:
$2^3/_4$	= 2,75	2,7500
$5^2/_3$	= 5,66...	5,6667
$^4/_5$	= 0,8	0,8000
$^6/_7$	= 0,857...	0,8570
	10,067	10,0737

ad b) Tagw.

37,65
10,0737
47,7237

Bemerkung. Wenn man bei dem zweiten Summanden statt 5,66... nun 5,6667 nimmt, so ist man, nach Ziff. 5, S. 172, und Ziff. 6 S. 177 der Wahrheit näher, d. h. 5,6667 drückt den wahren Werth des Bruches $5^2/_3$ genauer aus, als 5,66...

Antwort: a) Der Bauer kaufte zu seinem Gute noch 10,0737 oder (etwas weniger genau) 10,07 Tagwerke; b) sein ganzes Besitzthum ist jetzt 47,7237 oder 47,72 Tgw. = 47 Tgw. 72 Decimale.

Aufgaben.

1. Addire: a) 0,4 + 0,3; b) 0,37 + 0,61; c) 0,08 + 0,07; d) 0,527 + 0,136; e) 0,738 + 0,506; f) 0,0276 + 0,4682; g) 0,96775 + 0,98075!

2. Zähle zusammen: a) 0,8735 + 6,0438 + 7,00732 + 1,10059; b) 7,2845 + 29,0647 + 427,9507 + 67,5873; c) 81,81984 + 0,60574 + 7,06921 + 19,5726.

3. Wie viel ist: a) 87,5981076 + 0,0027 + 16,5 + 9,80007 + 13,75; b) 793,06 + 29,807059 + 0,257 + 8,00012 + 127,91; c) 0,000825 + 0,72009 + 0,98 + 0,7 + 0,6936?

4. Was macht zusammen: a) 0,8883 + 0,7777 + 0,1111 + 0,9999 + 0,2222 + 0,3333; b) 7,66... + 0,04545... + 5,33... + 63,6363... + 8,0909... + 0,3125; c) 07592592... + 9,866... + 19,4431818... + 0,66... + 9,088... + 0,92?

5. Nach dem Münzfuße vom Jahre 1838 hat die Vereinsmünze (Zwei-Thalerstück) ,041 Meter, das Zwei-Guldenstück 0,036 Meter, das Ein-Guldenstück 0,030 Meter, das Halb-Guldenstück 0,024 Meter im Durchmesser; welche Länge haben diese vier Münzstücke, wenn sie neben einander gelegt werden?

6. Ein Kaufmann erhält 6 Fässer Waaren. Nach Ausweis des Zoll-Amtes wiegt A 7,5 Ztr., B 12,8 Ztr., C 3,75, D 19,3125 Ztr., E 9,84375 Ztr., u. F 6,025 Ztr.; welches Gewicht hatten alle 6 Fässer zusammen?

7. Ein Bienenzüchter erhielt beim Zeideln von seinen 6 Bienenstöcken folgendes Quantum Honig, und zwar von Nro. 1. 19,75 ℔, von Nro. 2. 27,8125 ℔, von Nro. 3. 16,8625 ℔, von Nro 4. 25,09375 ℔, von Nro. 5. 32,59375 ℔ und von Nro. 6. 22,0875 ℔; wie viel im Ganzen?

8. Nach den Untersuchungen Berzelius enthält 1 Pfund (16 Unzen) Wasser der Karlsbader Mineralquellen: schwefelsaures Natron 19,8691 Gr., salzs. Natron 7,9758 Gr., kohlens. Natron 9,693 Gr., kohlens. Kalk 2,37 Gr., flußspats. Kalk 0,0245 Gr., phosphors. Kalk 0,0016 Gr., kohlens. Strontian 0,0073 Gr., kohlens. Magnesia 1,3696 Gr., basische phosphors. Thonerde 0,0024 Gr., kohlensaures Eisenoxydul 0,0278 Gr., kohlens. Manganoxyd 0,0064 Gr., Kieselerde 0,5771 Gr.; wie viele feste Theile enthält 1 ℔ solchen Wassers?

9. Der Schall braucht von der Sonne zum Merkur 5,362529 Jahre, von da zur Venus 4,689113 J., von da zur Erde 3,833094 J., von da zum Mars 7,0222204 J., von da zur Vesta 12,31479 J., von da zur Juno 4,0168 J., von da zur Ceres 1,413 J., von da zur Pallas 0,002177 J., von da zum Jupiter 33,004636 J., von da zum Saturn 60,091035 J., von da zum Uranus 133,016736 J.; wie viel Jahre von der Sonne zu jedem dieser Planeten?

10. Ein Oekonomiegut hat einen Gütercompler von 67,85 Tagwerke. Dazu werden noch gekauft: Ackerfeld $17\frac{5}{8}$ Tgw., Holzgründe $16\frac{5}{6}$ Tgw., Weidenschaft $9\frac{4}{5}$ Tgw., Torfboden $\frac{8}{9}$ Tgw. und ein Krautgarten mit $\frac{4}{7}$ Tgw.; wie viel Tagwerke Boden hält das Oekonomiegut?

II. Subtraktion der Decimalbrüche.

Auch hier hat man nur darauf zu achten, daß die gleichnamigen Stellen, also Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. w., wie beim Addiren, genau unter einander zu stehen kommen, und verfährt dann gerade so, als wären es ganze Zahlen. Sind vom Minuenden z. B. mehr Zehntel abzuziehen, als derselbe enthält, so entlehnt man bei den Einern einen Einer, macht ihn zu Zehntel ($1 = \frac{10}{10}$) und zieht dann ab. Enthält die Vollzahl, oder die Abzugszahl weniger Decimalstellen, so denkt man sich an die fehlenden Stellen Nullen. Ungeübtere Rechner können anfänglich beim schriftlichen Rechnen an die fehlenden Decimalstellen die Nullen setzen.

Beispiele. Ziehe ab: a) 3,4 von 9,9; b) 17,53 von 82,78; c) 7,8 von 16,3; d) 29,65 von 47,26; e) 8,765 von 9,082; f) 6,2851 von 7,45; g) 9,8 von 20,7406!

Ausführung:

a)	b)	c)	d)	e)
9,9	82,78	16',3	47,26	9',082
3,4	17,53	7,8	29,65	8,765
6,5	65,25	8,5	17,61	0,317

f)			g)		
7,4'5	oder	7,4'5'0'0	2'0',7406	oder	2'0',7406
6,2851		6,2851	9, 8		9,8000
1,1649		1,1649	10, 9406		10,9406

Ist der Minuend oder der Subtrahend ein periodischer Bruch, so werden etwa fehlende Stellen, wenn eine größere Genauigkeit erreicht werden soll, nicht durch Nullen, sondern durch die periodischen Zahlen ergänzt, d. h. der Bruch wird durch die periodischen Zahlen erweitert oder gleichnamig gemacht. Z. B. Vermindere a) 13,833... um 8,4375; b) 23,59375 um 17,66... c) 79,0078503 um 53,86363...

Ausführung:

a)	b)	c)
1'3,8'3'3'3	23',59'37'5	79',0'0785'03
8,4375	17,66666	53,8636363
-5,3958	-5,92709	25,1442140

Ist ein gemeiner Bruch von einem Decimalbruch, oder ein Decimalbruch von einem gemeinen abzuziehen: so verwandelt man den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch und verfährt dann wie vorher. Z. B. Ein Silberarbeiter hatte 3,15625 Mark Gold und $13^1/_6$ Mark Silber. Nach einiger Zeit fand er $1^3/_4$ Mark Gold und 7,46829 Mark Silber verarbeitet; wie viel Vorrath von jeder Sorte hatte er noch?

Ausführung:

Gold:		Silbr.	
$1^3/_4$ M.	$= 1^{3,0}/_4 = 1,75$	$13^1/_6$ M.	$= 13^{1,0}/_6 = 13,166...$
$^3/_4$	$= 4 : 3,0 = 0,75$	$^1/_6$	$= 6 : 1,0 = 0,166...$
	28		6
	-20		-40
	20		36
	--		-40
			36 u. s. w.

Gold:		Silber:
3',15625 Mark.		13',1'6'6'6'6
1,75000		7,46829
1,40625		-5,69837

Antwort: An Gold hatte er noch 1,40625 Mark, und an Silber 5,69837 Mark vorräthig.

Aufgaben.

1. Ziehe ab: a) 7,25 von 31,68; b) 236,175 von 629,298; c) 12 von 19,037; d) 0,6852 von 5,8877; e) 0,0243 von 0,5753!

2. Subtrahire: a) 15,75 von 27,625; b) 9,8726 von 17,1452; c) 0,6875 von 5; d) 0,9684 von 3,7025; e) 0,0708 von 0,2506; f) 0,00785 von 0,04203!

3. Vermindere a) 16,33... um 7; b) 5,166... um 2,57938; c) 4,0303... um 0,975082; d) 8 um 2,77027; e) 0,833... um 0,5384615; f) 31,6363... um 5,5742857; g) 1,2879504 um 0,432432...!

4. Die deutsche oder geographische Meile hält 7407,4074, die bayerische 7414,975, die österreichische 7586,457 und die preußische 7532,485 französ. Meter; wie viel Meter ist jede größer oder kleiner, als die andere?

5. Nach neueren Bestimmungen hat der durch den Aequator gehende Erddurchmesser eine Länge von 1718,8734 geogr. Meilen, und der durch die beiden Pole gehende nur 1713,1274 geogr. Meilen; wie groß ist der Unterschied?

6. Ein bayer. Decimal-Cubikzoll geschmiedetes Gold wiegt 0,8594828125, Silber 0,47147266, Kupfer 0,39944, Eisen 0,3454, Zinn 0,3668 bayr. Pfund; wie viel wiegt jedes Metall mehr oder weniger, als das andere?

7. Der bayr. Schäffel hält 222,35751 Liter, der württembergische Schäffel 177,226 Liter; um wie viel ist der bayr. Schfl. größer?

8. Von 32,02 Tagwerk Ackerfeld werden verkauft: a) 5,75 Tgw., b) 0,8625 Tgw., c) 3,0625 Tgw. und d) 4,7 Tgw.; wie viel Tagw. bleiben unverkauft?

9. Ein Bauer fährt in die Schranne und bringt dahin: Kern 7 Schfl. 4 Mtz. 3,5 Vrl.; Roggen 4 Schfl. 2 Mtz. 1,25 Vrl.; Gerste 9 Schfl. 2 Mtz. 2,09375 Vrlg.; Haber 6 Schfl. — Mtz. 2,166.... Vrlg. Davon verkauft er 5 Schfl. 2 Mtz. 2,3... Vrlg. Kern, 3 Schfl. 5 Mtz. 0,75 Vrl. Roggen, 4 Schfl. 3 Mtz. 3,66... Vrlg. Gerste und 2 Schfl. 5 Mtz. 2,84375 Vrlg. Haber. a) Wie viele Schfl. hat er zur Schranne gebracht? b) wie viele Schfl. verkauft? c) wie viele Schfl. von jeder Sorte blieben unverkauft? d) wie viele Schfl. wurden mehr verkauft, als unverkauft blieben?

10. Ein Kaufmann erhält 3 Ztr. $41^3/_4$ ℔ Kaffee, 5 Ztr. $16^2/_3$ ℔ Zucker, 7 Ztr. 79,8125 ℔ Reiß und 1 Ztr. 65,3 ℔ Gewürz. a) Was wog die ganze Sendung? b) Er verkaufte nach und nach 1 Ztr. 95,83.. ℔ Kaffee, 3 Ztr. 71,7 ℔ Zucker, 4 Ztr. $33^5/_6$ ℔ Reiß und $97^{15}/_{16}$ ℔ Gewürz; wie viel Waare hat er im Ganzen verkauft? c) was blieb ihm von jeder Sorte noch übrig? d) wie viel an Gewicht hat der Rest der Waare noch?

III. Multiplikation der Decimalbrüche.

Hier sind folgende Hauptfälle zu beachten:

a) Einer der beiden Faktoren ist ein Decimalbruch, der andere aber eine dekadische Zahl, nämlich 10, oder 100, oder 1000 u. s w. In diesem Falle hat man nur, wie schon Ziff. 2 S. 169 ad 4 nachgewiesen ist, das Decimalkomma eben so viele Stellen nach rechts zu rücken, als der eine der Faktoren Nullen hat; man setzt also bei 10 das Decimalkomma eine Stelle, bei 100 zwei Stellen u. s. w. weiter rechts hin. Z. B. Multiplizire 0,8574 a) mit 10, b) mit 100, c) mit 1000 und d) mit 10000!

Ausführung:

$$0{,}8574 \times 10 = 8{,}574$$
$$0{,}8574 \times 100 = 85{,}74$$
$$0{,}8574 \times 1000 = 857{,}4$$
$$0{,}8574 \times 10000 = 8574$$

Beweis. 10mal 8574 Zehntausendtel = 85740 Zehntausendtel; 10000 Zehntausendtel = 1 Ganzes; 85740 Zehntausendtel daher = 8 Ganze und 5740 Zehntausendtel; 5740 Zehntausendtel = 574 Tausendtel; folglich 10mal 0,8574 = 8,574. Eben so verhält es sich auch bei der Multiplikation mit 100 u. s. w.

b) Einer der Faktoren ist ein Decimalbruch, der andere aber eine ganze Zahl, die nicht 10 oder ein Produkt aus 10 ist. In diesem Falle multiplizire man gerade so, als wären beide Faktoren ganze Zahlen, und schneide dann von dem Produkte durch das Decimalkomma eben so viele Ziffern, von der Rechten zur Linken gezählt, ab, als der Faktor Decimalstellen hat. Z. B. Vervielfache: a) 3,75 mit 7; b) 15 mit 4,3; c) 53,078 mit 9; d) 27 mit 619,705; e) 0,7 mit 5; f) 0,0015 mit 23!

Ausführung:

a)	b)	c)
3,75	15	53,078
7	4,3	9
26,25	45	477,702
	60	
	64,5	

d)	e)	f)
619,705	0,7	0,0015
27	5	23
4337935	3,5	00045
1239410		00030
16732,035		00,0345
		= 0,0345

Die Richtigkeit dieses Verfahrens wollen wir an den Beispielen a), b) und e) darthun. — a) 3,75 = 375 Hundertel; 7mal so viel ist, wie oben die Berechnung ergab, 2625 Hundertel, und diese Hundertel geben 26 Ganze und 25 Hundertel. Um also diese 2625 Hundertel auf ihren üblichen Ausdruck zurückzuführen, ist nur nöthig, durch das Decimalkomma von dem Produkte zwei Stellen, von rechts nach links gezählt, abzuschneiden, also gerade so viele Ziffern, als der eine Faktor Decimalstellen hat. — Wenn man bei b) 15 mit 43 multiplizirt, so gibt dies 654; man soll aber nur mit dem zehnten Theil von 43 multipliziren, darum muß das Produkt mit 10 wieder dividirt werden, was dadurch geschieht, wenn man eine Stelle durch das Decimalkomma abschneidet. — e) 0,7 = 7 Zehntel; 7 Zehntel 5mal genommen = 35 Zehntel; 10 Zehntel = 1 Ganzes; 35 Zehntel daher = 3 Ganze und 5 Zehntel; also 35 Zehntel = 3,5. Man hat somit von dem Produkte durch das Decimalkomma nur *eine* Stelle abzuschneiden, um dasselbe auf seinen richtigen Ausdruck zu bringen; aber auch der eine Faktor hat nur *eine* Decimalstelle.

Indem man den Decimalbruch als ganze Zahl betrachtet, so ist derselbe gleichsam mit seinem Nenner multiplizirt worden. Soll nun aber das Produkt unter dem wahren Werthe erscheinen, so folgt natürlich, daß dasselbe wieder mit diesem Nenner dividirt wird, d. h. man muß von dem Produkte eben so viele Stellen abschneiden, als der Decimalbruch selbst Decimalstellen enthält.

Von der Richtigkeit der Produkte kann man sich noch überzeugen, wenn man die Decimalbrüche in gewöhnlicher Bruchform darstellt und dann auf die gewöhnliche Weise multiplizirt. Z. B. 3,75 = $3^{75}/_{100}$ = $^{375}/_{100}$; $^{375}/_{100} \times {}^{7}/_{1} = {}^{2625}/_{100} = 26^{25}/_{100}$ in einem Decimalbruche ausgedrückt ist = 26,25 — wie oben.

c) Beide Faktoren enthalten Decimalbrüche. In diesem Falle sehe man beide Faktoren (Multiplikand und Multiplikator) als ganze Zahlen an, multiplizire sie wie solche und schneide nachher von dem Produkte so viele Stellen ab, als beide Faktoren zusammen Decimalstellen haben.

Beispiele. Multiplizire: a) 4,9 mit 2,5; b) 27,5027 mit 6,075; c) 0,035 mit 0,027; d) 0,0074 mit 0,019!

Ausführung:

a)	b)	c)	d)
4,9	27,5027	0,035	0,0074
2,5	6,075	0,027	0,019
245	1375135	245	666
98	1925189	70	74
12,25	1650162 0	0,000945	0,0001406
	167,0789025		

Die beiden Faktoren haben bei Beispiel a) zwei Decimalstellen; es müssen also im Produkte auch 2 Stellen abgeschnitten werden. Bei b) haben die Faktoren zusammen 7 Decimalstellen, und es müssen im Produkte 7 Stellen abgeschnitten werden. Bei Beispiel c) haben die Faktoren 6, und bei d) 7 Decimalstellen; es sollten daher bei dem Produkte c) 6 und bei d) 7 Stellen abgeschnitten werden. Da sich aber in dem Produkte c) nur 3 und in d) nur 4 Stellen vorfinden, so müssen die fehlenden Stellen links durch Nullen ausgefüllt werden. Die wahren Produkte sind daher für c) 0,000945, und für d) 0,0001406.

Die Richtigkeit des Verfahrens läßt sich in folgender Weise darthun. Nehmen wir Beispiel a) 4,9 als 49, also als das Zehnfache, so wird sich auch das zehnfache Produkt ergeben, und eben so muß sich das Zehnfache ergeben, wenn 25 statt 2,5 genommen wird. Wenn aber ein zehnfach genommener Multiplikand mit einem zehnfach genommenen Multiplikator vervielfacht wird, so muß das Produkt das Hundertfache der einfachen Faktoren sein. Um daher das wahre Ergebniß zu erhalten, muß das hundertfache Produkt wieder mit 100 dividirt werden, d. h. man hat in dem Produkte zwei Ziffern abzuschneiden.

Oder: Wird $^1/_{10}$ mit $^1/_{10}$ multiplizirt, so erhält man $^1/_{100}$; dieses als Decimalbruch dargestellt: $0,1 \times 0,1 = 0,01$; wird $^1/_{100}$ mit $^1/_{10}$ multiplizirt, so erhält man $^1/_{1000}$, als Decimalbruch $0,01 \times 0,1 = 0,001$. Zehntel mit Zehntel multiplizirt, geben Hundertel, also 2 Decimalstellen; Hundertel mit Zehntel multiplizirt, geben Tausendtel, also drei Decimalstellen ꝛc. Daraus sehen wir klar, daß, wenn Decimalbrüche mit einander vervielfacht werden, das Produkt gerade so viele Decimalstellen erhält, als Multiplikand und Multiplikator zusammen derselben haben. Daher also die Regel: Sollen Decimalbrüche mit einander multiplizirt werden, so behandle man sie, als wären es ganze Zahlen, und schneide dann durch das Decimalkomma — von rechts her — im Produkte eben so viele Ziffern ab, als beide Faktoren Decimalstellen haben. — Die Decimalbrüche in der Form gewöhnlicher Brüche dargestellt, führen zu demselben Resultate.

d) Der eine Faktor ist ein Decimalbruch, der andere ein gemeiner Bruch. In diesem Falle multiplizire man, wie bei gemeinen Brüchen, die beiden Zähler, d. h. den Decimalbruch mit dem Zähler des gemeinen Bruches, schneide von dem Produkte so viele Ziffer ab, als der Decimalbruch Decimalstellen hat, und dividire dann dieses Produkt mit dem Nenner des gemeinen Bruches. Z. B. Wenn 1 Elle Tuch 2,8625 fl. gilt; wie hoch kommen $^3/_5$ Ellen? — Beurtheilung: $^3/_5$ Ellen werden $^3/_5$mal 2,8625 fl. gelten; man hat daher die 2,8625 fl. mit $^3/_5$ zu multiplizjiren.

$$2,8625 \times {}^3/_5 = \frac{2,8625 \,.\, 3}{5} = \frac{8,5875}{5} = 1,7175 \text{ fl.}$$

Man kann aber den gemeinen Bruch auch in einen Decimalbruch verwandeln; sodann tritt dasselbe Verfahren ein, wie unter c). Nämlich $^3/_5 = 0,6$; daher: $2,8625 \times 0,6 = 1,71750 = 1,7175$ fl.

Ist der eine Faktor mit dem gemeinen Bruch eine gemischte Zahl, so richtet man diese ein und verfährt im Uebrigen wie vorher. Z. B. Wenn der Ztr. Zucker 27,432 fl. gilt; wie hoch kommen $3^3/_4$ Ztr.? — $3^3/_4$ Ztr. gelten $3^3/_4$mal 27,432 fl.

$$\text{Daher: } 27,432 \times 3^3/_4 = \frac{27,432 \,.\, 15}{4} = \frac{411,480}{4} = 102,870 = 102,87 \text{ fl.}$$

$$\text{Oder: } 3^3/_4 = 3,75; \text{ daher: } 27,432 \times 3,75 = 102,87000 = 102,87 \text{ fl.}$$

Ist der eine oder der andere der Faktoren ein periodischer Decimalbruch, und soll eine größere Genauigkeit erreicht werden, so erweitert man

den Decimalbruch durch weitere Beifügung der periodischen Ziffern. Z. B. Vom Zentner Brutto werden 7,33... ℔ Tara gerechnet; wie viel beträgt diese von $5\frac{5}{6}$ Ztr. Brutto?

$$7{,}33... \times 5\tfrac{5}{6} = \frac{7{,}3333.. \times 35}{6} = \frac{256{,}666...}{6} = 42{,}777 \text{ ℔ Tara.}$$

Oder: $5\frac{5}{6} = 5{,}833...$; $7{,}3333 \times 5{,}8333 = 42{,}777...$ ℔ (abgekürzt bis auf drei Decimalstellen.)

Die Berechnung in gemeinen Brüchen führt zu demselben Resultate, nämlich $7{,}33... = 7\frac{1}{3}$; $7\frac{1}{3} \times 5\frac{5}{6} = {}^{11}\!\!\not{2}2/_{3} \times {}^{35}/_{6_3} = {}^{385}/_{9} = 42\frac{7}{9} = 42{,}77...$

Aufgaben.

1. Multiplizire: a) 0,2578; b) 0,6905; c) 0,0463; d) 0,0059 zuerst mit 10, dann mit 100, mit 1000 und mit 10000!

2. Vervielfache: a) 8,5 mit 4; b) 9,75 mit 6; c) 37,48 mit 25; d) 708,275 mit 16; e) 73 mit 5,09; f) 245 mit 26,405; g) 0,731 mit 7; h) 0,2054 mit 97; i) 0,00536 mit 27; k) 217 mit 0,00902!

3. Was macht a) 7,5 mit 3,8; b) 9,56 mit 7,5; c) 23,09 mit 5,25; d) 367,5208 mit 26,93; e) 597,0357 mit 0,845; f) 78,0026 mit 0,073; g) 0,5473 mit 0,052; h) 0,0097 mit 0,087; i) 0,00025 mit 0,067 multiplizirt?

4. Multiplizire: a) 0,75 mit $\frac{3}{4}$; b) 4,8 mit $\frac{5}{6}$; c) 0625 mit $1\frac{7}{8}$; d) 5,92 mit $\frac{4}{5}$; e) 14,49 mit $\frac{5}{7}$; f) 7,776 mit $2\frac{2}{3}$; g) 9,0625 mit $3\frac{1}{2}$; h) $13\frac{5}{9}$ mit 0,6363; i) $5\frac{1}{4}$ mit 9,1666; k) $8\frac{5}{6}$ mit 0,0075!

5. Wenn die Klafter Holz 13,875 fl. gilt; wie hoch kommen a) 9 Klafter; b) 7,5 Klafter; c) $5\frac{3}{4}$ Klafter?

6. Für 1 fl. kauft man 5,09375 ℔ Reiß; wie viel wird man a) um 7,25 fl., b) um 4,68 fl., c) um 8,075 fl, d) um $9\frac{3}{4}$ fl. und e) um $6\frac{2}{3}$ fl. erhalten?

7. Wenn der Durchmesser eines Kreises oder einer Kugel 1 Zoll, oder 1 Fuß beträgt, so ist derer Umfang 3,1416 Zoll, oder Fuß ꝛc. Wie groß ist demnach der Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser 7 Zoll beträgt? b) eines andern, dessen Durchmesser 5,8 Zoll; oder 9,41 Zoll; oder 6,8625 Zoll; oder 4,66... Zoll; od. 3,0909... Zoll; oder $7\frac{5}{6}$ Zoll beträgt?

8. Der Durchmesser der Erde am Aequator hat 1718,8734 geogr. Meilen; wie groß ist ihr Umfang?

9. Nach Moll's Versuchen legt der Schall im Mittel in jeder Secunde einen Weg von 332,244 Metres oder 1138,371 bayr. Fuß zurück. Wenn nun bei einem Gewitter zwischen dem Blitz und dem darauffolgenden Donner $27\frac{1}{2}$ Secunde vergehen; wie weit ist das Gewitter entfernt?

10. Das Gold ist 19,258; Silber 10,474; Quecksilber 13,593; Eisen 7,207; Marmor 2,84; gemeiner Kiesel 2,542mal so schwer, als das Wasser. Wie viel wiegt nun ein bayr. Cubikfuß von jedem dieser Stoffe, wenn ein bayr. Cubikfuß Wasser 44,39479 bayr. ℔ schwer ist?

IV. Division der Decimalbrüche.

Hier haben wir folgende Hauptfälle zu beachten:

a) Der Divisor ist 10, oder 100, oder 1000, oder überhaupt ein Produkt (eine Potenz) aus 10, der Dividend aber ein Decimalbruch. In sem Falle hat man nur, wie schon Ziff. 2, S. 169 ad 3 nachgewiesen ist, das Decimalkomma ebenso viele Stellen nach **links** zu rücken, als der Divisor Nullen hat; bei 10 also eine, bei 100 zwei, bei 1000 drei Stellen u. s. f. Z. B. Dividire a) 3768,5; b) 0,75 zuerst mit 10, dann mit 100, 1000, 10000!

Ausführung:

a)		b)	
10: 3768,5 = 376,85		10: 0,75 = 0,075	
100: 3768,5 = 37,685		100: 0,75 = 0,0075	
1000: 3768,5 = 3,7685		1000: 0,75 = 0,00075	
10000: 3768,5 = 0,37685		10000: 0,75 = 0,000075.	

Beweis. a) Der 10te Theil von $^1/_{10}$ ist $^1/_{100}$; der 10te Theil von $^5/_{10} = {^5/_{100}}$; der 10. Theil von $8 = {^8/_{10}}$; der 10. Theil von 6 Zehner oder 60 = 6; der 10te Theil von 700 = 70; der 10te Theil von 3000 = 300; daher also der 10te Theil von 3768,5 = 376,85. Diesen 10ten Theil erhält man, wenn das Decimalkomma eine Stelle nach links gerückt wird. Eben so verhält es sich auch bei der Division mit 100. b) Der 10te Theil von $^1/_{100}$ ist $^1/_{1000}$; der 10te Theil von $^5/_{100} = {^5/_{1000}}$; der 10te Theil von $^7/_{10} = {^7/_{100}} = {^{70}/_{1000}}$; also der 10. Theil von $^{75}/_{100} = {^{75}/_{1000}}$, als Decimalbruch = 0,075. Da der Nenner dieses Bruches 4 Stellen hat, so muß dessen Zähler 3 Stellen erhalten, und weil der Bruch 0,75 in seinem Zähler nur 2 Stellen hat, so muß links eine Null angesetzt werden, anzuzeigen, daß der dividirte Bruch (der Quotient) keine Zehntel enthält. Aehnlich auch bei der Division mit 100 ꝛc.

b) Der Divisor ist eine ganze Zahl, die nicht 10 oder ein Produkt aus 10 ist, der Dividend ein Decimalbruch. In diesem Falle dividire man gerade so, als wäre der Dividend eine ganze Zahl, setze aber, wenn dessen Decimalstellen zur Division kommen, den Zahlen des bisher erhaltenen Quotienten rechts das Decimalkomma bei. Ist der Divisor größer, als die Ganzen des Decimalbruchs, so setze man an die erste Stelle des Quotienten eine Null nebst dem Komma. (Vergleiche die folgenden Beispiele b, c und d.)

Z. B. Dividire: a) 9,4 durch 2; b) 0,92 durch 4; c) 5,074 durch 8; d) 0,785 durch 15!

Ausführung:

```
a) 2: 9,4 = 4,7          b) 4: 0,92 = 0,23
      8                         8
     ---                       ---
      14                        12
      14                        12
     ---                       ---
      --                        --

c) 8: 5,074 = 0,63425    d) 15: 0,785 = 0,05233...
      0                         0
     ---                       ---
      50                        78
      48                        75
     ---                       ---
      -27                       -35
       24                        30
      ---                       ---
      -34                       -50
       32                        45
      ---                       ---
       -20                      -50
        16                       45 u. s. w.
       ---
       -40
        40
       ---
        --
```

Geht der Divisor in den Zahlen des Dividenden allein nicht rein auf, so setze man dem Reste eine Null bei und dividire weiter, bis die

Division aufgeht (wie bei c), oder bis man die hinlängliche Anzahl Decimalstellen im Quotienten erhalten hat (wie bei d). (Man sehe auch S. 177 f.)

c) Der Divisor ist ein Decimalbruch, der Dividend eine ganze Zahl. In diesem Falle multiplizire man den Divisor und den Dividend mit dem Nenner des Decimalbruches (man bringe beide unter gleiche Benennung) und dividire dann wie mit ganzen Zahlen. (Multiplizirt wird der Divisor, wenn das Decimalkomma weggelassen wird, und der Dividend, der hier aus Ganzen besteht, dadurch, daß man ihm rechts so viele Nullen anhängt, als der Divisorbruch Decimalstellen hat.)

Z. B. Dividire: a) 63 durch 3,5; b) 3 durch 7,5; c) 4 durch 6,4; d) 58 durch 0,8; e) 87 durch 2,75!

Ausführung:

a) 3,5 : 63
= 35 : 630 = 18
35
280
280

b) 7,5 : 3
= 75 : 30 = 0,4
00
300
300
---

c) 6,4 : 4
= 64 : 40 = 0,625
00
400
384
-160
128
-320
320
---

d) 0,8 : 58
= 8 : 580 = 72,5
56
-20
16
-40
40
--

e) 2,75 : 87
= 275 : 8700 = 31,636...
825
-450
275
1750
1650
-1000
825
-1750
1650

Es wird genügen, die Richtigkeit der Berechnungen an einem einzigen Beispiele darzuthun. Damit der Divisor 3,5 in Beispiel a) gleiche Benennung erhält, wie der Dividend 63, nämlich Ganze, so nimmt man statt 3,5 eine 10mal so große Summe, also 10 × 3,5 = 35. Um auch den Dividend 63 in ein gleiches Verhältniß zu bringen, muß derselbe mit 10 multiplizirt werden, also 10 × 63 = 630. Nun verhält sich 3,5 zu 63 gerade so, wie 35 zu 630, und es ist nun klar, daß 3,5 in 63 gerade so oft enthalten sein muß, als 35 in 630, nämlich 18mal.

d) Divisor und Dividend sind Decimalbrüche. In diesem Falle hat man zu beachten, ob Divisor und Dividend gleichviel Decimalstellen haben, oder nicht.

1) Haben beide gleichviel Decimalstellen, so betrachte man beide als ganze Zahlen und nehme die Division vor; dadurch erhält man sogleich den richtigen Quotienten. Z. B. Wie oft ist enthalten a) 18,36 in 96,46? b) 3,785 in 110,396?

Ausführung:

```
a) 8,36:196,46              b) 3,785:110,396
=836:19646=23,5             =3785:110396=29,166...
 1672                         7570
 -2926                        34696
  2508                        34065
 -4180                        --6310
  4180                         3785
  ----                         25250
                               22710
                              -25400
                               22710 u. s. w.
```

Werden Divisor und Dividend mit ein und derselben Zahl multiplizirt, so bleibt der Quotient unverändert. In a) wurden beide mit 100, in b) mit 1000 vervielfacht; es verhalten sich daher 8,36 zu 196,46 wie 836 zu 19646, und 3,785 zu 110,396 wie 3785 zu 110396; folglich ist 8,36 in 196,46 und 3,785 in 110,396 gerade so oft enthalten, als 836 in 19646, und 3785 in 110396, nämlich a) 23,5mal und b) 29,166...mal.

2. Ist die Anzahl der Decimalstellen im Divisor und Dividend ungleich: so multiplizirt man entweder a) beide mit dem größten Decimalnenner und dividirt dann wieder wie mit ganzen Zahlen, und es ergibt sich aus denselben, oben dargelegten Gründen sogleich der richtige Quotient; oder b) man vervielfacht beide mit dem Nenner des Divisors, dividirt ebenfalls, wie mit ganzen Zahlen, setzt aber zu den Zahlen des Quotienten das Decimalkomma, wenn die noch vorhandenen Decimalstellen des Dividends in die Division gezogen werden. Z. B. Dividire a) mit 6,7 in 184,786, b) mit 3,825 in 79,8, c) mit 0,0576 in 9,5!

In den beiden Beispielen a) und b) ist der größte Nenner 1000; folglich sind Divisor und Dividend mit 1000 zu multipliziren; in Beispiel c) ist der größte Nenner 10000; folglich sind hier Divisor und Dividend mit 10000 zu vervielfachen.

Ausführung:

```
a) 6,7 : 184,786 (1000 ×)       Oder: 6,7 : 184,786 (Der Nenner des Divisors
                                                     ist 10, also 10 ×)
=6700 : 184786 = 27,58          = 67 : 1847,86 = 27,58
       13400                           134
       -50786                          -507
        46900                           469
(670Ø:) -3886Ø                          -388
         3350Ø                           335
(67Ø:)  -5360Ø                          -536
         5360Ø                           536
         -----                           ---
```

Bemerkung. Hat der Divisor in der Einer-, Zehnerstelle ꝛc. Nullen, so kann man, statt dem jedesmaligen Reste des Dividends eine Null beizusetzen, in dem Divisor jedes Mal eine Null ausstreichen, wie in vorstehender Berechnung durch den eingeklammerten Divisor und durch die durchstrichenen Nullen angedeutet ist.

b) 3,825 : 79,8 (1000 ×)
= 3825 : 79800 = 20,862...
7650
-33000
30600
-24000
22950
-10500
7650 u. s. w.

c) 0,0576 : 9,5 (10000 ×)
= 576 : 95000 = 164,93...
576
3740
3456
-2840
2304
-5360
5184
-1760
1728 u. s. w.

Von der Richtigkeit dieser Operationen und der Resultate kann man sich auch überzeugen, wenn die Divisionen ausgeführt werden, nachdem die Decimalbrüche in der Form der gemeinen Brüche angesetzt werden.

Aus diesen Beispielen und aus den dargelegten Gründen ergibt sich für die Division der Decimalbrüche die einfache Regel:

Man gebe dem Divisor und dem Dividend eine gleiche Anzahl Decimalstellen und dividire sodann wie mit ganzen Zahlen.

e) Der Divisor oder der Dividend, einer von beiden ist ein gemeiner Bruch. In diesem Falle verwandle man entweder den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch und verfahre dann, wie oben gezeigt wurde; oder man multiplizire Divisor und Dividend mit dem Nenner des gemeinen Bruches, und dividire sodann mit dem Produkte aus dem Divisor in das Produkt aus dem Dividend.

Das letzte Verfahren muß auch darum zu einem richtigen Resultate führen, weil, wie schon oben gesagt, die Produkte zweier Zahlen, die mit ein und derselben Zahl vervielfacht worden sind, in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie diese Zahlen selbst. Z. B.

1) Wenn man für das Pfund Kaffee $^3/_4$ fl. bezahlt, wie viel Pfund wird man um 25,47 fl. erhalten?

(Man wird so oft ein Pfund erhalten, als $^3/_4$ fl. in 25,47 fl enthalten ist.)

a) $^3/_4$ = 0,75.

a) 0,75 : 25,47
= 75 : 2547 = 33,96 ℔

Oder b) $^3/_4$: 25,47
4 4
3 : 101,88 = 33,96 ℔

Unter b) wurden Divisor ($^3/_4 \times 4 = {}^{12}/_4 = 3$) und Dividend mit dem Nenner des gemeinen Bruches multiplizirt. Wie sich nun 3 zu 101,88 verhält, so verhält sich auch $^3/_4$ zu 25,47; folglich: so oft 3 in 101,88 — oder auch 300 in 10188 enthalten ist, eben so oft ist $^3/_4$ in 25,47 enthalten.

2. Ein Schneidermeister kaufte ein Stück Tuch mit $56^5/_6$ Ellen, woraus er Herren-Oberröcke verfertigen will. Wie viele kann er machen, wenn er zu jedem 3,875 Ellen verwendet? (So oft 3,875 Ellen in $56^5/_6$ Ellen enthalten sind, so viele Oberröcke wird er verfertigen können.)

a) 3,875 : $56^5/_6$ = 3,875 : 56,833...
= 3875 : 56833 = 14,66...

Oder b) 3,875 : $56^5/_6$
6 6
23,250 : 341,000 = 14,66...

Da unter b) der Divisor drei Decimalstellen hat, so muß man dem Dividenden ebenfalls 3 Decimalstellen geben und ihm deßwegen 3 Nullen anhängen.

Antw. Der Schneidermeister wird 14,66... oder $14^2/_3$ Oberröcke erhalten.

Ist der Divisor oder der Dividend ein periodischer Bruch, und erfordert die Berechnung eine größere Genauigkeit: so erweitert man entweder die Decimalbrüche durch weitere nöthige Beisetzung der periodischen Ziffern, oder man setzt im Verlaufe der Division den Resten des Dividends statt einer Null die periodische Ziffer bei. Z. B. Wie oft ist 3,7 in 17,833... enthalten?

Ausführung:

a) 3,7 : 17,833...
= 37 : 178,3333 = 4,8198...
148
-303
296
--73
37
363
333
-303
296 u. s. w.

b) 3,7 : 17,833...
37 : 178,33 = 4,8198...
148
-303
296
--73
37
363
333
-303
296 u. s. w.

Aufgaben.

1. Dividire: a) mit 2 in 8,4; in 17,6; in 5,7; b) mit 7 in 28,49; in 45,5; in 368,655; in 0,959; in 0,8547; c) mit 23 in 69,46; in 87,8; in 129,054; in 0,796; in 0,0405; d) mit 112 in 248,64; in 93,756; in 8,048; in 0,0575!

2. Dividire: a) mit 0,5 in 5; in 7; in 13; b) mit 0,7 in 3; in 25; c) mit 0,25 in 4; in 19; d) mit 0,875 in 8; in 27; e) mit 8,75 in 7; in 89; in 476; f) mit 27,592 in 96; in 847; g) mit 275,0255 in 695; in 120; in 13!

3. Wie oft ist enthalten a) 7,25 in 65,25; in 384,25; in 4893,75; b) 9,16 in 233,58; in 66,41; in 6,97; c) 4092 in 14,322; in 1,023; in 0,984; d) 0,725 in 28,275; in 1,885; in 0,493?

4. Wie oft ist enthalten a) 7,5 in 70,875; in 195,605; in 5,025; in 0,9375; b) 6,3125 in 41,6; in 118,48; in 0,96; c) 11,8125 in 31,2; in 3,6; in 0,72; in 0,221; d) 0,876 in 4,2; in 15,75; in 33,3; e) 0,7865 in 0,2; in 0,57; in 0,09; f) 0,065 in 7,8; in 2,764; in 0,04987?

5. Dividire a) mit $^3/_4$ in 26,25; b) mit $^7/_{12}$ in 19,635; c) mit $1^4/_5$ in 21,78; d) mit $2^2/_3$ in 7,072; e) mit 5,375 in $17^5/_6$; f) mit 3,65 in $^{17}/_{20}$!

6. Ein Meridiangrad hält 380701,0666 bayr. Fuß; wie viele bayr. Fuß kommen auf 1 geographische Meile, da derer 15 auf einen Grad gehen?

7. Wenn ein Wagenrad 8,625 bayr. Fuß Umfang hat; wie viele Achsendrehungen macht es, um eine bayr. Chaussee-Meile zurücklegen, da diese 25406 bay. Fuß hält?

8. Das Licht bewegt sich so schnell, daß es in 1 Secunde 42319,5 Meilen zurücklegt; die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne durchläuft in 1 Secunde 4,88235 Meilen; der Schall legt in 1 Secunde 0,047193... Meilen zurück. Wie vielmal so groß ist die Geschwindigkeit des Lichtes, als die der Erde und die des Schalles? und wie vielmal die der Erde, als die des Schalles?

9. Ein Schneidermeister ließ sich ein Stück Zeug zu Unterfutter mit 57,25 Ellen, und ein Stück Seidenstoff mit 49,16 Ellen zu Westen, ferner (73,64) Ellen Rocktuch und $63^2/_3$ Ellen Hosenzeug kommen. Zu den Westen verwendete er für jede $^3/_4$ Ellen Unterfutter und $^5/_6$ Ellen Seidenstoff; zu einem Oberrocke $3^5/_8$ Ellen Tuch, und zu ein

Paar Beinkleidern 1,583 Ellen Zeug. Wie viel Stück Westenunterfutter, Westen, Oberröcke und Beinkleider konnte er verfertigen?

10. Zu einem Scheibenschießen werden 27 Scheiben bestellt; jede sollte einen Umfang von $7^{11}/_{15}$ Fuß haben. a) Wie groß ist der Durchmesser jeder Scheibe, wenn 3,1416 Fuß Umfang 1 Fuß Durchmesser geben? b) welche Länge nehmen die 27 Scheiben ein, wenn sie in eine Reihe neben einander gelegt werden?

Abgekürztes Multipliziren der Decimalbrüche.

Ziffer 5, Seite 172, ist gezeigt worden, wie Decimalbrüche, ohne große Fehler zu begehen, abgekürzt werden können. Außer dieser üblichen Methode bedient man sich noch anderer Abkürzungen beim Multipliziren und Dividiren, wenn die Berechnungen der Art sind, daß sehr vielzifferige Decimalbrüche sich ergeben müßten, und wobei doch nicht eine so große Genauigkeit bis auf die kleinsten Bruchtheile erforderlich ist. Das Verfahren für das Multiplizіren soll an nachfolgendem Beispiele gezeigt und erklärt werden. Z. B. Multiplizire 8,5672475 mit 0,528164!

Ausführung:

```
 8,5672475
  0,528164
----------
 428362375
  17134495
   6853798
     85672
     51403
      3427
----------
4,52491170
```

Erklärung des Verfahrens.

Statt, wie gewöhnlich, rechts mit der **niedrigsten** Stelle des Multiplikators das Multipliziren zu beginnen, fängt man hier links mit der **höchsten** Stelle, nämlich mit der Ziffer 5 an und multiplizirt **alle** Stellen des Multiplikands. Hierauf wird mit der nächsten Ziffer, hier mit 2 vervielfacht, jedoch so, daß man von dem Produkte aus der Endziffer des Multiplikands, nämlich $2 \times 5 = 10$, die Null nicht anschreibt, die 1 (den Zehner) aber zu dem Produkte der nächsten Stelle, also zu $2 \times 7 = 14$ zählt, was dann 15 macht. Von diesem Produkte setzt man 5 unter die 5 des ersten Theilproduktes, weil beide Hundertmilliontel sind. Nämlich die Endziffer 5 des Multiplikands bezeichnet Zehnmilliontel; da sie aber bei der ersten Multiplikation mit Zehntel vervielfacht wurde, so muß sie zum Produkte Hundertmilliontel geben. Die 7 in der nächsten Stelle des Multiplikands bezeichnet Milliontel; sie wurde aber mit 2 Hundertel multiplizirt, und darum muß ihr Produkt ebenfalls Hundertmilliontel geben, folglich muß 5 aus dem zweiten Theilprodukte unter die 5 des ersten gesetzt werden. Eben so verhält es sich auch mit der Untereinanderordnung der folgenden Theilprodukte. Nun wird mit der Ziffer 8 des Multiplikators vervielfacht, und zwar angefangen bei Ziffer 4 im Multiplikand. Dieses Produkt wird aber um 6 vermehrt, weil das Produkt der vorhergehenden Ziffer, nämlich $8 \times 7 = {}^{56}/_{1000000000} = 5^{6}/_{10}$ Hundertmilliontel, was für 6 zu nehmen ist — eigentlich und vielmehr $8 \times 75 = 600/1000000000$ = 6 Hundertmilliontel, also 6 Einheiten der nächst höhern Decimalstelle, die eben deßwegen zu dem Produkte aus 8×4 zu addiren sind. Mit der Ziffer 1 des Multiplikators fängt man bei Ziffer 2 im Multiplikand an zu vervielfachen. Diesem Produkte zählt man jedoch nichts zu, weil das Produkt aus der vorhergehenden Ziffer 4, nämlich $1 \times 4 = {}^{4}/_{10}$... weniger als $^{1}/_{2}$ Einheit der nächst höhern Decimalstelle (der Hundertmilliontel) ist. Die Ziffer 6 des Multiplikators beginnt die Multiplikation mit der Ziffer 7 des Multiplikands, und es wird diesem Produkte 1 zugezählt wegen des vorhergehenden Produktes aus $6 \times 2 = 12$. Endlich hat man noch mit der letzten Ziffer des Multiplikators, mit 4 zu vervielfachen, fängt hier mit der Ziffer 6 im Multiplikand an, fügt diesem Produkte 3 hinzu, weil das Produkt aus der vorhergehenden Ziffer ($4 \times 7 =$) 28 d. i. $2^{8}/_{10}$ Hundertmilliontel, also nahe zu 3 Einheiten der nächst höhern Decimalstelle beträgt. — Wo das Decimalkomma zu setzen ist, läßt sich schon aus dem ersten Theilprodukte bestimmen. Wäre der Multiplikand bloß mit 5 vervielfacht worden, so müßte das Produkt 8 Decimalstellen haben. Diese werden, wie die Ansicht lehrt, durch Multiplikation mit den übrigen Ziffern des Multiplikators nicht vermehrt, und darum muß auch das ganze Produkt nur 8 Decimalstellen haben.

Wenn es sich um keine besonders große Genauigkeit handelt, so bringt man die weggelassenen Stellen in den folgenden Theilprodukten gar nicht in Anschlag, in welchem Falle man dann das Produkt 4,52491159 erhält. Erst in der 7. und 8. Decimal-

stelle ergibt sich der wol nur unbedeutende Fehler von 11 Hundertmilliontel. — Die vollständige Multiplikation würde zum Produkte 4,5249117085900 geben. Wollte man dieses Produkt noch bis auf drei Decimalstellen abkürzen, so hätte man 4,525.

Aufgaben.

Multiplizire in abgekürzter Weise: a) 4,714268 mit 5,295; b) 4,27384097 mit 6,378195; c) 47,3710618 mit 9,247168; d) 8,547614 mit 0,8547394; e) 0,79316582 mit 8,51206; f) 0,74183155 mit 0,314265; g) 8,000095 mit 3,0076005; h) 0,7619481 mit 0,00068; i) 0,076934210834 mit 0,000003057026!

Abgekürztes Dividiren der Decimalbrüche.

Wie man bei dem abgekürzten Multipliziren im Multiplikand allmälig eine Ziffer nach der andern wegläßt, so kann dieses auch hier in gleicher Weise im Divisor geschehen. So lange jedoch der Dividend selbst noch Stellen zum Herabziehen hat, läßt man im Divisor keine Ziffer weg, und der diesfällige Quotient bezeichnet immer noch Ganze. Sind im Dividenden keine Stellen mehr herabzuziehen, so setzt man rechts an die Zahl des bereits erhaltenen Quotienten das Decimalkomma und dividirt in den verbliebenen Rest, ohne daß man diesem eine Null beisetzt, wie es sonst geschieht, mit dem um eine Decimalstelle abgekürzten Divisor. In gleicher Weise fährt man fort in die folgenden Reste zu dividiren mit jedesmaliger Weglassung einer Decimalstelle bei dem Divisor, bis keine Ziffer mehr wegzulassen ist. Dabei ist aber zu merken, daß, der größern Genauigkeit wegen, die weggelassene Stelle mit dem jedesmaligen neuen Quotienten zwar auch multiplizirt, ihr Produkt aber nur dann zu der nächst höhern Stelle addirt wird, wenn dasselbe ein oder mehre, oder mehr als ein Halbes der nächst höhern Einheiten bildet. Haben Divisor und Dividend nicht gleichviel Decimalstellen, so ersetzt man die, wo weniger sind, durch Nullen, d. h. man macht Divisor und Dividend gleichnamig. Z. B. Dividire mit 0,537186 in 27,90835!

0,537186 : 27,908350 = 51,95286...

	26 85930	
	−1 049050	
	537186	
(537186:)	511864	
9 . 53718 + 5 =	483467	d. i. mit der Vermehrung um 5 aus 9mal der im Divisor weggelassenen Ziffer 6 = 54; also 5 Einheiten der nächst höhern Stelle.
(53718:)	−28397	
5 . 5371 + 4 =	26859	d. i. mit der Vermehrung um 4 aus 5mal 8 = 40.
(5371:)	−1538	
2 . 537 =	1074	ohne Vermehrung, weil 2 × 1 = 2, also nur $^2/_{10}$ Einheit der nächst höhern Stelle.
(537:)	−464	
8 . 53 + 6 =	430	d. i. mit der Vermehrung um 6 aus 8 × 7 = 56, die 5 und mehr als $^1/_2$ Einheit der nächst höhern Stelle sind.
(53:)	−34	
6 . 5 + 2 =	32	d. i. mit der Vermehrung um 2 aus 6 × 3 = 18.

Eine noch nähere Erklärung ist wol nicht mehr nöthig. Durch die in den eingeklammerten Divisoren duchstrichenen Ziffern ist die allmälige Hinweglassung einer Ziffer nach der andern angedeutet. Die vollständige Division würde 51,95286 nebst einem Reste

von $^{94804}/_{537186}$ zum Quotienten geben; es fehlen also nicht ganz $^{2}/_{1000000}$, ein Fehler, der in praktischen Aufgaben wol nicht in Anschlag zu bringen ist.

Man hätte auch Divisor und Dividend zuerst in ganze Zahlen verwandeln, d. i. mit dem größten Nenner vervielfachen können, wie wir früher (Seite 197) gehört haben, nämlich: 0,537186 : 27,90835 mit 1000000 multiplizirt = 537186 : 27908350, und dividirt dann in derselben Weise wie vorher.

Aufgaben.

1. Dividire in der Weise der Abkürzung: a) 3,716048 : 8,479536; b) 2,865437 : 37,546925; c) 3,716048 : 7,632035; d) 0,854932 : 6,487357; e) 9,376485 : 16,475; f) 15,314865 : 7; g) 0,3547808 : 10,926954; h) 3,729 : 0,5873125; i) 0,003584316 : 2,46; k) 0,075 : 0,0865257; l) 0,7368 : 0,0009742!

2. Die bayr. Elle hält genau genommen 369,2721 Pariser Linien; die württembergische hält 272,288; die Frankfurter-brabanter 309,953 und die Wiener Elle 345,4128 Pariser Linien. Wie viele Wiener, dann württembergische und Frankfurter-brabanter Ellen enthält 1 bayer. Elle?

Auflösen (Resolviren) übergeordneter Größen in untergeordnete Größen.

Diese Rechnungsart bietet durchaus keine Schwierigkeit dar, indem man hier nur den Decimalbruch, wie wenn er eine ganze Zahl wäre, mit der Reduktions- oder Währungszahl der untergeordneten Größe zu vervielfachen hat, worauf man dann von dem Produkte so viele Stellen abschneidet, als der Decimalbruch selbst Ziffern hat. Diese Zahl drückt nun den Werth der gegebenen Größe in ihrer untergeordneten Größe aus.

Sollte dem einen oder andern Schüler dieses Verfahren nicht recht klar sein, so lasse der Lehrer die Berechnung auch in der Form der gemeinen Brüche vollziehen, was die Richtigkeit obiger Operation einleuchtend darthun wird. Ein paar Beispiele werden hinreichend sein, die Sache klar zu machen.

1. Wie viel Kreuzer geben 0,758 Gulden.

Berechnung:

1 fl. = 60 kr.; 0,758 fl. = 0,758 × 60 kr. oder $\frac{758}{1000} \times 60$ kr. Daher:

0,758 fl. =
60 kr.
45,480 kr. = 45,48 kr.

Oder: $\frac{758}{1000} \times \frac{60}{1} = \frac{4548}{100} = 45^{48}/_{100} = 45{,}48$ kr.

Antwort: 0,758 fl. machen 45,48 kr.

2) 3,49807 Schfl. geben wie viele Schfl., Mtz., Vlgr. und Drßgr.?

Berechnung:

3 Schfl. = 3 Schfl. — 0,49807 Schfl. =
6
2 | 98842 Mtz. d. i. 0,98842 Mtz. = 4 → 3,65368 Vrlg.
4
3 | 95368 Vlg. d. i. 0,95368 Vrlg. = 8 → 7,62944 Drßg.
8
7 | 62944 Drßg.

Antwort. 3,49807 Schfl. geben 3 Schfl. 2 Mtz. 3 Vrlg, 7,62944 Drßgr.

Aufgaben.

1. Wie viele Kreuzer einzeln machen a) 0,75 fl.; b) 0,625 fl.; c) 0,397 fl.; d) 0,4078 fl.; e) 0,6666... fl.; f) 0,540909... fl.?

2. Wie viele Schfl., Mtz., Vrlg. und Drßgr. geben a) 5,64 Schfl.; b) 13,725 Schfl.; c) 4,0529 Schfl.; d) 0,68542 Schfl.; e) 0,72333... Schfl.; f) 0,008756 Schfl.?

3. Wie viele Ztr., Pfd., Lth. und Qt. geben a) 6,8125 Ztr.; b) 9,84375 Ztr.; c) 4,06432 Ztr.; d) 0,625 Ztr.; e) 0,368751 Ztr.; f) 0,001666... Ztr.?

4. Wie viele Jahr, Monate, Tage [den Monat à 30 Tage], Stunden und Minuten machen a) 2,55 Jahre; b) 4,739 J. c) 8,0792 J.; d) 0,765 J. e) 0,98756 J; f) 0,02365 J.?

5. Wie viele Quadrat-Ruthen, Q.-Fuß, Q.-Zoll und Q.-Linien [10- und 12-theilig] geben a) 3,7425 Qt.-Ruthen; b) 7,300865 Qt.-Ruthen; c) 0,8571263 Q.-Ruthen; d) 0,005273 Qt.-Ruthen.

Zurückführen (Reduziren) untergeordneter Größen in Decimalbrüche übergeordneter Größen.

Auch diese Rechnungsart kann keine Schwierigkeit wieder darbieten, weil es sich hier nur darum handelt, die untergeordneten Größen zuerst in gemeine Brüche der übergeordneten Größe zurückzuführen, was Seite 158 ff., und diese sodann in Decimalbrüche zu verwandeln, was S. 173 ff. gezeigt wurde. Man kann hiebei auf eine zweifache Weise verfahren, wie an nachfolgendem Beispiele gezeigt werden soll.

1) 7 fl. 48 kr. 3 pf. sollen in einem vierstelligen Decimalbruche gegeben werden!

1te Berechnung: 7 fl. 48 kr. 3 pf. = 7 fl. $48^3/_4$ kr.

7 fl. $48^3/_4$ kr. = 7 fl. + $\frac{48^3/_4}{60}$ fl. = $7^{195}/_{240}$ = $7^{13}/_{16}$ fl.

$7^{13}/_{16}$ = $7^{13,0000}/_{16}$ = 7,8125 fl. — Antw. 7 fl. 48 kr. 3 pf. sind 7,8125 fl.

2te Berechnung: 3 pf. = $^{3,0000}/_4$ = 0,7500 kr. = 0,75 kr.

48 kr. + 0,75 kr. = 48,75 kr. = $^{48,7500}/_{60}$ = 0,8125 fl.

Also wieder: 7 fl. 48 kr. 3 pf. = 7,8125 fl.

Die 2te Berechnungsart ist die bessere.

2) 166 Tage 15 Stunden 39 Minuten sind in einen vierstelligen Decimalbruch von Jahren zu verwandeln!

Berechnung:

39 Minuten = $^{39,0000}/_{60}$ Std. = 0,6500 = 0,65 Std. — 15,65 Std. = $^{15,6500}/_{24}$ Tg. = $0,6520^5/_6$, wofür zu nehmen ist 0,6520 + 1 = 0,6521 Tg. 166,6521 Tg. = $^{166,6521}/_{365}$ J. = $0,4565^{296}/_{365}$, wofür zu nehmen ist 0,4565 + 1 = 0,4566 Jahr.

Antw. 166 Tage 15 Stunden 39 Minuten sind 0,4566 Jahr.

3) 66 ℔ 23 Lth. $2^1/_2$ Qt. sollen in einem vierstelligen Decimalbruch von Zentnern dargestellt werden!

Berechnung:

$2^1/_2$ Qt. = $\frac{2^1/_2}{4}$ = $^5/_8$ = $^{5,0000}/_8$ = 0,6250 = 0,625 Lth.

23,625 Lth. = $^{23,6250}/_{32}$ = $0,7382^{13}/_{16}$℔, wofür man 0,7382 + 1 = 0,7383 ℔ nimmt. — 66,7383 ℔ = $^{66,7383}/_{100}$ = $0,6673^{83}/_{100}$ Ztr., wofür man aber wieder 0,6674 Ztr. zu nehmen hat, weil $^{83}/_{100}$ mehr als die Hälfte der nächsten höhern Stelle (3) beträgt.

Antw. 66 ℔ 23 Lth. $2^1/_2$ Qnt. sind 0,6674 Ztr.

Aufgaben.

1. In unserem Gelde [süddeutscher Währung] gelten a) der Kronenthaler 2 fl. 42 kr, b) der Conventions- [sogenannte bayerische] Thaler 2 fl. 24 kr.; c) der preuß. Thaler 1 fl. 45 kr.; d) der französ. Thaler [5 Francs] 2 fl. 20 kr.; e) die Hamburger Banko-Mark 52 kr. 2 pf. Wie heißen diese Werthe in ein- bis vierstelligen Decimalguldenbrüchen ausgedrückt.

2. Stelle in drei- bis fünfstelligen Decimalbrüchen von Schäffeln dar: a) 3 Mtz. 2 Vrlg. 4 Drßgr.; b) 5 Mtz. 3 Vrlg. 6 Drßgr.; c) 1 Mtz. 1 Vrlg. 7 Drßgr. d) 3 Schfl. 5 Mtz. 2 Drßgr.; e) 19 Schfl. 4 Mtz. 3 Vrlg. 5 Drßgr.!

3. Wasfür fünftheilige Zentnerbrüche erhält man a) aus 72 ℔ 18 Lth. 2 Qt.; b) aus 33 ℔ 29 Lth. 3 Qt.; c) aus 57 ℔ 13 Lth. $2^1/_2$ Qt.; d) aus 5 Ztr. 97 ℔ 8 Lth. 1 Qt.; e) aus 7 Ztr. 46 ℔ 19 Lth. $2^2/_3$ Qt.?

4. In 7stelligen Decimalbrüchen von Jahren sollen dargestellt werden: a) 92 Tage 14 Stunden 45 Minuten; b) 237 Tg. 20 Stdn. 40 Minut.; c) 7 Wchn. 5 Tg. 8 Stdn. 36 Min.; d) 29 Wchn. 4 Tg. 21 Stdn. $52^1/_2$ Min.; e) 9 Jahre, 197 Tg. 17 Stdn. $26^2/_3$ Min.!

Die Decimalbrüche angewendet in den Berechnungen praktischer Regeldetri-Aufgaben.

Hat der Schüler den bisherigen Unterricht über Decimalbruch-Rechnen richtig erfaßt: so kann für ihn die Anwendung der Decimalbrüche in den verschiedenen Ansätzen praktischer Regeldetri-Aufgaben keine Schwierigkeit mehr haben. Das Rechnen mit Decimalbrüchen bietet auch hier viele Bequemlichkeit dar, indem dieselben auch hier gerade so, wie ganze Zahlen zu behandeln sind, und nichts Weiteres zu berücksichtigen ist, als was über das Rechnen mit Decimalbrüchen in den vier Grundrechnungsarten gesagt worden ist. Ein paar Beispiele werden die Sache einleuchtend machen, die wir in verschiedenen Ansätzen berechnet darstellen wollen.

1. $2^1/_2$ Ellen Tuch gelten $7^3/_4$ fl.; wie hoch kommen $7^1/_2$ Ellen.
$^1/_2 = 0,5$; $^3/_4 = 0,75$

Berechnung:

1. Regeldetri-Ansatz.

```
Ell.   fl.    Ell.
2,5    7,75   7,5
       7,5
      ----
      3875
     5425
    ------
2,5: 58,125
-------------
25: 581,125 = 23,25 fl.
    50
    --
    -81
     75
     --
     -62
      50
      ---
      125
      125
      ---
      ---
```

2. Proportions-Ansatz.

```
Ell.    Ell.    fl.     fl.
2,5  :  7,5  =  7,75 :  x.
                7,5
               ----
               3875
              5425
             ------
         2,5: 58,125
        -------------
         25: 581,25 = 23,25 fl.
             50
             --
             -81
              75
              --
              -62
               50
               ---
               125
               125
               ---
               ---
```

3. Ketten-Ansatz.

fl. x.	7,5 Ell.
Ell. 2,5	7,75 fl.
	3
	23,25 fl.

4. Ansatz nach der Bruchform.

Ell. fl.

$$\frac{7{,}5^3 \quad 7{,}75}{2{,}5 \quad x} = 23{,}25 \text{ fl.}$$

Antw. $7\frac{1}{2}$ Ellen Tuch gelten 23,25 fl. = 23 fl. 15 kr.

2. Ein Kaufmann gewann an 3 Ztr. 75 ℔ Kaffee 40 fl. 40 kr. $3\frac{1}{5}$ pf.; wie groß wird sein Gewinn sein an $15\frac{5}{6}$ Ztr. Kaffee?

3 Ztr. 75 ℔ = 3,75 Ztr.; $15\frac{5}{6}$ Ztr. = $15^{5,000}/_6$ = 15,833... Ztr.

40 fl. 40 kr. $3\frac{1}{5}$ pf. = 40,68 fl.; denn $3\frac{1}{5}$ pf. = $\frac{3\frac{1}{5}}{4}$ = 0,8 kr.; 40,8 kr. = $^{40,80}/_{60}$ = 0,68 fl.

Berechnung:

1. Kettenansatz.

Gw. fl. x	15,833 Ztr.
Ztr. 3,75	40,68 fl. Gw.
1,25	13,56
1,25	214,69548 =

125 : 21469,548 = 171,676... fl. und der Decimalbruch abgekürzt = 171,68 fl. = 171 fl. 40,8 kr.

2. Ansatz nach der Bruchform.

Ztr. fl.

$$\frac{15{,}833 \cdot 40{,}68^{13,56}}{3{,}75_{1,25} \quad x} = \frac{15{,}833 \times 13{,}56}{1{,}25} = \frac{214{,}69548}{1{,}25} =$$

125 : 21469,548 = 171,676... = 171,68 fl. = 171 fl. 40,8 kr.

Antw. An $15\frac{5}{6}$ Ztr. Kaffee gewinnt der Kaufmann 171 fl. 40,8 kr.

3. Wie lange müssen a) 1753,6 fl. zu 6,25 % ausstehen, bis sie 479,5 fl. Zinsen abwerfen? b) Bis zu welchem Tage muß dieses Kapital ausstehen, wenn es am 26. Oktober 1855 ausgelegt wurde?

Vorbereitungsansatz.

	fl. Kpt.	fl. Zins.	Jahr.
Bedingungssätze:	100	6,25	1
Fragesätze:	1753,6	479,5	x
	—	+	

Dieser Vorbereitungsansatz wird gelesen: 100 fl. Kapital müssen, um 6,25 fl. Zinsen zu bringen, 1 Jahr ausstehen; wie lange [wie viele Jahre] müssen 1753,6 fl. Kapital ausstehen, bis sie 479,5 fl. Zinsen tragen?

Kapital und Kapital stehen im indirekten (umgekehrten) Verhältniß, was durch das Minuszeichen (—) angedeutet ist; denn man muß hier schließen: je mehr Kapital, desto weniger Jahre. Zins und Zins stehen im direkten (geraden) Verhältniß, was durch das Pluszeichen (+) angedeutet ist; denn man muß schließen: je mehr Zins, desto mehr Jahre.

Berechnung ad a):

1. Kettenansatz.

J. x	100 fl. K.
fl. Kp. 1753,6	479,5 fl. Zs
Zs. fl. 6,25	1 J.
1,25	95,9
0,05	4
438,4	
21,920	95,900
2192	9590 = 4,375 J.

```
9590 = 4,375 J.
8768
-8220
 6576
 16440
 15344
 -10960
  10960
 -----
```

2. Basedow'scher Ansatz.

fl. Kp.	fl. Zs.	J.
4	95,9	
100	479,5	1
1753,6	6,25	x =
438,4	1,25	
	0,05	

$$\frac{95{,}9 \times 1}{438{,}4 \times 0{,}05} = \frac{95{,}9}{21{,}920} =$$

21,920 : 95,900 =

2192 : 9590 = 4,375 J.

(Die Division wie neben.)

Erklärung. 6,25 wurde gegen 479,5 gekürzt durch 5, wodurch man die Zahlen 1,25 u. 95,9 erhielt; hierauf wurde 1,25 gegen 100 durch 25 gekürzt, woraus sich 0,05 und 4 ergab; endlich wurde noch 4 gegen 1753,6 gekürzt, wodurch man aus letzterer Zahl 438,4 erhält. Nun wurden die beiden Divisorzahlen mit einander multiplizirt und mit ihrem Produkte (21,92) in den Dividenden 95,9 dividirt; der sich ergebende Quotient drückt aus, wie viele Jahre das Kapital ausstehen muß.

Berechnung ad b:

4,375 Jahre = 4 Jahre 4 Monate 15 Tage.

a) 0,375 J. =

```
    12
   ---
   750
   375
   ---
 4,500 Monate.
 0,5 Mon. =
    30
   ---
  15,0 = 15 Tg.
```

b)

Jahr.	Mon.	Tg.
1854	9	25
+ 4	4	15
1858	13	40 =
1859	2	11 d. i.

am 12. März 1860.

Erklärung. Unter a) wurden die 0,375 Jahre in Monate und Tage aufgelös't; unter b) die 4 Jahre 4 Monate und 15 Tage zu der Zeit, da das Kapital ausgelegt wurde, addirt; denn so viele Zeit später muß das Geld wieder zurückbezahlt werden, was dann auf den 12. März 1860 trifft.

Beantwortung: a) 1753,6 fl. müssen 4,375 Jahre oder 4 Jahre, 4 Monate und 15 Tage auf Zins ausliegen. b) das Kapital muß bis zum 12. März 1860 ausstehen.

Der Lehrer lasse seine Schüler solche und ähnliche Aufgaben auch in gemeinen Brüchen berechnen.

Aufgaben.

1. Wie hoch kommen 87,5 Ellen Tuch; wenn 2,25 Ellen 6,75 fl. gelten?
2. Wenn man um $^3/_4$ fl. $4^1/_5$ ℔ einer Waare erhält, wie viele Pfund wird man für $11^1/_4$ fl. erhalten? (Die Brüche sind in Decimalbrüche zu verwandeln.)

3. Ein Kaufmann hat 20,4166... Ztr. Zucker zu dem Preise von 775,833... fl.; wie hoch kommen 0,625 Ztr. zu stehen? (Wie heißt diese Aufgabe, wenn die Decimalbrüche in gemeine Brüche verwandelt werden?)

4. Wie hoch kommen 37 Schff. 5,5 Mtz. Mehl, wenn man für 4 Mtz. 1 Vrlg. 6,66.. Drßgr. 13 fl. 58,75 kr. bezahlen muß? b) Wenn dieses Geld dann mit preuß. Thalern, oder mit Kronenthalern, oder mit franz. Thalern (5 Francs) bezahlt werden sollte; wie viele wären je nöthig?

5. Für 1 Pfund 27 Lth. 1 Qt. bezahlt man 2 fl. 57 kr. 3 pf.; wie hoch kommen dann 94 ℔ 13 Lth. 3 Qt.?

6. Ein Kaufmann erhielt um 1766 fl. 40 kr. Waaren, und gewann daran $13^1/_2$ Prozent; wie viel betrug der ganze Gewinn?

7. Wenn das Schfl. Korn 19 fl. 12 kr. gilt, so erhält man um 8 kr. 2 ℔ 9 Lth. 3 Qt. Brod; wie viel Brod wird man um dasselbe Geld zu der Zeit erhalten, wenn das Schfl. Korn 13 fl. 20 kr. gilt?

8. Zu wie viel Prozent stehen 2866 fl. 40 kr. aus, wenn dieses Kapital in 3 Jahren $7^1/_2$ Monaten $467^5/_6$ fl. Zinsen gebracht hat? —

9. Wie groß ist ein Kapital, das zu 4,5 % angelegt in 0,625 Jahren 232,5 fl. Zinsen bringt? b) Wie viele Zinsen wird dieses Kapital zu 4,75 % bringen, wenn es vom 28. Juli 1852 bis zum 5. März 1856 aussteht?

10. Wie lange müssen 7865,833... fl. zu 5,33...% ausstehen, bis sie 2359,75 fl. Zinsen eintragen? b) Bis zu welchem Tage muß dieses Kapital ausstehen, wenn es am 2. Dezember 1855 ausgeliehen wurde?

Vermischte Aufgaben.

1. Ein Bauer hinterläßt seinen 5 Kindern an Grundstücken, und zwar Ackerfeld 37,78125 Tagwerke; Wiesenboden 16,92 Tagw.; Viehweide 13,78 Tgw.; Waldung 64,037 Tgw.; Obstgarten 1,3785 Tgw.; Wurzgarten 0,4075 Tgw. Zur Bestreitung der Unkosten wurden verkauft 1,075 Tgw. Ackerfeld, 2,97 Tgw. Wiesenboden und 1,4795 Tgw. Waldung. Es frägt sich: a) Wie viele Tagwerke Grundstücke hielt der ganze Besitzstand? b) Wie viele Tgw. Grundstücke wurden verkauft? c) Wie viele Tgw. Grundstücke blieben im Ganzen zur Vertheilung noch übrig? d) Wie viele Tagwerke erhielt jedes Kind überhaupt? e) Wie viele Tgw. kamen zur Vertheilung vom Ackerfeld, vom Wiesboden und von der Waldung?

2. Ein Fuhrmann hatte 5 Ballen Waaren, die sammt dem Packgut wogen: A 93,5 ℔, B 67,0625 ℔, C 89,257 ℔, D 77,8 ℔ und E 96,529 ℔. Das Packgut allein wog bei A 8,75 ℔, bei B 5,87 ℔, bei C 6,09 ℔, bei D 7,945 ℔ und bei E 9,0765 ℔. a) Wie viel Brutto-Gewicht hatten alle 5 Ballen? b) Was wog das Packgut aller 5 Ballen zusammen? c) Welches Gewicht hatte die Waare allein?

3. Wenn das Pfund Nettogewicht dieser Waaren von A 1,8 fl., von B 1,75 fl., von C 0,875 fl., von D 0,7623 fl. und von E 2,0536 fl. kostete; a) was mußte dafür bezahlt werden? b) Wie groß war der Gewinn, wenn beim Verkaufe im Durchschnitte an 100 ℔ der Gesammt-Waare 17,345 fl. gewonnen wurden? c) Welches war die Verkaufs-Summe?

4. Ein Wirth kaufte 12 Eimer Wein à 76,578 fl., woran er 187,824 fl. gewonnen hat; wie theuer hatte er den Wein wieder verkauft? und wie hoch den Eimer?

5. Ein Kaufmann erhielt drei Ballen Tuch, A mit 69,8 Ellen zu 262,448 fl., B mit 53,75 Ell. zu 127,495 fl. und C mit 42,7864 Ell. zu 197,8971 fl. Er verkaufte die Elle von A um 4,75 fl., von B um 3,55 fl. und von C um 5,65 fl. a) Was mußte er für das Tuch bezahlen? b) Was hat er dafür eingenommen? c) Wie viel hat er im Ganzen gewonnen? d) Wie hoch ist ihm selbst die Elle von jeder Sorte im Ankauf zu stehen gekommen? e) Was hat er an jeder Elle gewonnen?

6. Ein bayer. Schfl. hält 11209,584 Pariser Cubik-Zoll; wie viele solche C.-Zoll halten 13,5625 bayer. Schfl.? b) Wie viele würtembergische Schäffel geben diese, wenn 1 würtbr. Schfl. 8934,4112 Pars. C.-Zoll hält?

7. Die bayer. Elle hält 369,2721 Pariser Linien; die württemberg. Elle 272,288 Pars.-L.; die Frankfurter-brab. Elle 309,953 Prs.-L., und die Wiener Elle 345,4128 Prs.-L. — Wie viele Ellen in den dieser anderen Staaten geben a) 278,75 bayer. Ell.; b) 354,8625 würtberg. Ell; c) 402,81818... frankf.-brb. Ellen, und c) 570,01666... Wiener-Ellen?

8. Wenn ein Vorderrad eines Wagens 2′9″ und ein Hinterrad 3′6″ [12theilig]

im Durchmesser hat; a) wie groß ist der Umfang dieser Räder? b) Wie oft hat sich jedes Rad um seine Achse gedreht, bis der Wagen eine bayer. Chausse-Meile [25406 bayer. Fuß] zurückgelegt hat? [Ein Fuß Durchmesser gibt 3,14159 Fuß Umfang. — [Die volle sogenannte Ludolphine oder Ludolphische Zahl ist 3,14159265358979323846264338327950 28.... Wie wird diese Zahl ausgesprochen?

9. 27 Ztr. einer Waare gelten 3968 fl.; wie theuer ist 1 Ztr.? [Die Antw. ist in einem vierstelligen Decimalbruch auszudrücken, und dieser dann in Kreuzer und Pfennige aufzulösen].

10. Ein Schiff hatte geladen 987453 ℔ Waare, deren Werth 659875 fl. betrug; wie theuer war 1 ℔.? [Die Antwort wie vorher].

11. Verwandle 4 Metzen 2 Vierling 4 Dreißiger in einen vierstelligen Decimalbruch von Schäffel?

12. 195 Tage 18 Stunden 52$^{1}/_{2}$ Minuten stelle in einem sechsziffrigen Decimalbruch von Jahren dar!

13. Wenn die Elle Tuch 3,75 fl. gilt; a) wie hoch kommen 77$^{2}/_{3}$ Ellen? b) Wenn man diese Summe in preuß. Thalern, oder in Kronenthalern, oder in französ. Thalern [5 Francs] bezahlen wollte; wie viele wären je nöthig [in zweistelligen Decimalbrüchen ausgedrückt]?

14. Um $^{5}/_{8}$ fl. kauft man 1 ℔ Zucker; wie viel Pfund könnte man um 127,65 fl. erhalten?

15. Für 7$^{5}/_{6}$ Ztr. wurden 29,375 fl. Fracht bezahlt; was mußte für den Zentner bezahlt werden?

16. Was hat man für 53,75 Ellen Tuch zu bezahlen; wenn 2,5 Ellen 5,4 fl. gelten?

17. Um 2,75 fl. erhält man 3,625 Maß Wein; wie viel Maß Wein wird man um 74,8 fl. erhalten?

18. Für 2 Schfl. 5 Mtz. 1 Vrlg. 6,666.. Drßgr. Korn bezahlt man 47 fl. 52,5 kr.; was hat man für 34 Schfl. 2 Mtz. 7,25 Drßgr. zu bezahlen?

19. Ein Stück Tuch mißt 65,555... Ellen, wovon die Elle 3,75 fl. gilt; welchen Werth hat das ganze Stück? [Nachdem der Werth berechnet ist, muß der Bruch des Tuchwerthes in Kreuzer aufgelöset werden, und sodann sind alle drei Decimalbrüche in gemeine Brüche zu verwandeln].

20. Ein Kornhändler kaufte auf einer Schranne um 415 $^{2}/_{3}$ fl. Gerste, das Schfl. um 11$^{3}/_{5}$ fl.; wie viel Schfl. kaufte er? [Bei dieser Berechnung müssen die Brüche zuerst in Decimalbrüche verwandelt werden].

21. Wie hoch kommen 11 Ztr. 97$^{2}/_{3}$ ℔ Gewürz; wenn 5 ℔ 19 Lth. 2,6 Qt. auf 2 fl. 47 kr. 6,5 hl. zu stehen kommen?

22. D hat 4 Kapitalien auf Zinsen ausstehen: a) 2400 fl. zu 4,5 pCt., b) 3650 fl. zu 3,75 pCt., c) 2725 fl. zu 4,625 pCt. und d) 3840fl. zu 4,1666... pCt.; wie viele Zinsen hat er jährlich einzunehmen?

23. W hatte 4 Kapitalien zu 5 Prozent ausstehen, welche er am Ende des Jahres mit den Zinsen eingezog. 1600 fl. hatten 6,75 Monate, 1550 fl. 8,375 Mnt., 2895 fl. 5,67 Mnt. und 2475 fl. 9,875 Mnt. ausgestanden; wie groß war am Ende des Jahres seine Einnahme?

24. 1784,15 fl. standen 2,5 Jahre zu 5 pCt., 3667,345 fl. 3,667 Jahre zu 4 pCt. und 363,75 fl. zu 4,625 pCt. 3,7 Jahre auf Zinsen; wie viel betrugen die Zinsen von jedem Kapital? wie viel zusammen?

25. Wie groß ist das Kapital, das zu 4,75 pCt. in 4,875 Jahren 895,375 fl. Zinsen gebracht hat?

26. Zu wie viel Prozent stehen 2867,2 fl.; wenn dieses Kapital in 2,5 Jahren 311,6 fl. Zinsen gebracht hat?

27. Wie lange müssen 1970,5833... fl. zu 5,555... Prozent ausstehen, bis sie so viel Zinsen bringen, als 2482,4 fl. zu 4,333... pCt. in 2, 833... Jahren?

28. A, B und C legen Geld zusammen, und zwar A gibt 796,75 fl., B 987,9 fl. und C 844,8125 fl. Sie gewinnen damit 350,595 fl. a) Wie viel trifft jedem vom Gewinne? b) Wie viel wurde Prozent gewonnen?

29. 2 Mtz. 20 Drßgr. gelten 3 fl. 8,13 kr.; wie hoch kommen 5,17 Schfl.

30. Fünf Wirthe kaufen mit einander 33 Eimer 4,84 Maß Wein. A zahlt 328,125 fl. B 325,6275 fl., C 105 fl., D 141 fl. und E 588,8775 fl. — Wie viel Eimer und Maß erhält jeder?

Fuchs